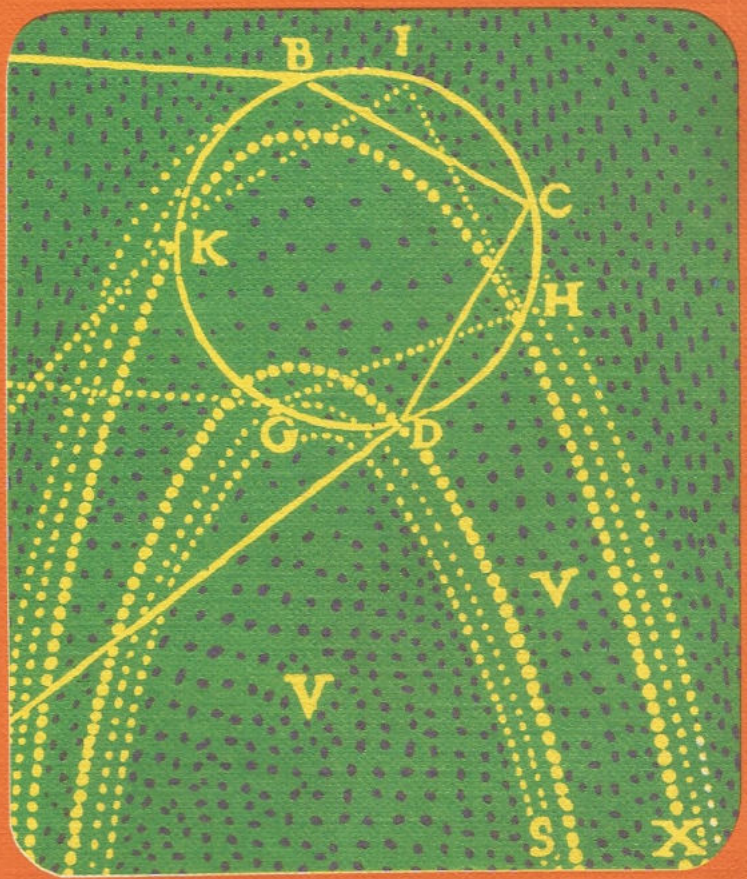
matemática 2

BACHILLERATO



Educación Santillana

matemática

B
I
K
G
V

matemática

2
BACHILLERATO

Educación
Santillana

PROLOGO

El presente libro de segundo curso de Bachillerato se ha escrito con el mismo plan fundamental que inspiró el de primer curso.

El ser éste un curso de introducción al análisis y a la geometría exige presentar con rigor las delicadas cuestiones de esta parte de la Matemática, y al mismo tiempo evitar caer en un excesivo rigorismo que haría ininteligibles las citadas cuestiones para los alumno de esta edad.

Persuadidos en todo momento de esta doble exigencia, hemos procurado hacer llegar al alumno el espíritu de la Matemática moderna sin exagerar el formalismo.

El libro es susceptible de adaptarse a cursos de distinto nivel; el profesor puede omitir algunas demostraciones o, por el contrario, proponer actividades de ampliación, según el grado de madurez de su curso.

La primera Unidad es de preliminares y se dedica a actualizar y precisar conocimientos que se usarán a lo largo del libro.

Al igual que en nuestro libro de primer curso, las Unidades y los temas van precedidos de introducciones en las que se expone brevemente el alcance de los contenidos.

La estructura de cada Unidad queda reflejada al final de la misma en un diagrama estructural.

Es utópico pensar que se puede aprender Matemática sin realizar muchos ejercicios; por esta razón, inmediatamente después de introducir un concepto se proponen en el margen derecho de las páginas los ejercicios necesarios para consolidarlo. Pensamos que con los ejercicios intercalados en los temas hay suficiente para un curso normal.

De los ejercicios y cuestiones que hay al final de cada tema, unos son análogos a los realizados a lo largo del tema, por lo que pueden ser utilizados para controles y recuperaciones; otros son más difíciles y se pueden proponer si el nivel del curso lo permite.

Los complementos y ampliación de la parte final del libro se han concebido para atender a las diferencias individuales, por ello el uso que se haga de esta parte queda a criterio del profesor.

Las orientaciones metodológicas del Ministerio proponen que el estudio de la derivada y de la función primitiva se limite a sus conceptos, interpretaciones y algunos ejemplos sencillos. Con el fin de proponer algunos ejemplos interesantes hemos estudiado las funciones derivadas del producto y del cociente, dejando para el curso próximo el estudio de las derivadas de la mayor parte de las funciones elementales.

INDICE

PROLOGO 5

UNIDAD 1.—APLICACIONES 11

TEMA 1.—**Aplicaciones** 12

1. Correspondencias 12
2. Relaciones binarias 12
3. Relaciones de equivalencia 13
4. Clases de equivalencia. Conjunto cociente 14
5. Aplicaciones 16
6. Aplicación identidad 17
7. Operaciones internas 17
8. Ley de composición externa 18
9. Composición de aplicaciones 18
10. Función recíproca o inversa 19
11. Imagen directa de un subconjunto por una aplicación 20
12. Imagen recíproca de un subconjunto por una aplicación 21

Ejercicios y cuestiones 24

UNIDAD 2.—GEOMETRIA VECTORIAL Y AFIN 26

TEMA 2.—**Espacios vectoriales** 27

1. $\mathbb{R}^2$: Definición y notaciones 27
2. Igualdad de vectores 28
3. Adición en $\mathbb{R}^2$ 28
4. Propiedades de la adición en $\mathbb{R}^2$ 29
5. Multiplicación de vectores por números reales 31
6. Propiedades del producto de un vector por un numero real 32
7. El espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot\,\mathbb{R})$ 33
8. Dependencia e independencia lineal 34
9. Bases y coordenadas 38
10. El espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot\,\mathbb{R})$ 39
11. El espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot\,\mathbb{R})$ 41

Ejercicios y cuestiones 43

TEMA 3.—**El plano vectorial** 44

1. Vectores fijos 44
2. Equipolencia de vectores fijos 45
3. El conjunto $\mathbf{V}^2$ de los vectores libres del plano 46
4. Caracterización de un vector libre 48
5. Adición de vectores libres 49
6. Propiedades de la adición 50
7. Producto de un vector libre por un número real 51
8. Propiedades del producto por escalares 52
9. El espacio vectorial $(\mathbf{V}^2, +, \cdot\,\mathbb{R})$ 53
10. Bases y coordenadas 53

Ejercicios y cuestiones 56

TEMA 4.—**Plano afín** 57

1. Correspondencia entre puntos del plano y vectores libres 57
2. Correspondencia entre los espacios vectoriales $\mathbf{V}^2$ y $\mathbb{R}^2$ 58
3. Plano afín. Sistema de referencia afín 60

4. Coordenadas cartesianas en el plano afín..... 61
5. Cambio de base en el espacio vectorial $\mathbf{V}^2$..... 62
6. Cambio de sistema de referencia en el plano afín. 64
7. Primeras aplicaciones..... 66

Ejercicios y cuestiones..... 71

TEMA 5.—**La recta en el plano afín**..... 72

1. Ecuación vectorial de la recta..... 72
2. Ecuaciones paramétricas, continua y general de la recta..... 74
3. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos. 76
4. Pendiente de una recta..... 77
5. Ecuación explícita de la recta..... 80
6. Ecuación segmentaria de la recta..... 80
7. Esquema de las ecuaciones de la recta..... 81
8. Incidencia de puntos y rectas..... 82
9. Incidencia de rectas..... 84
10. Paralelismo de rectas..... 87
11. Recta paralela a otra por un punto. Haz de rectas paralelas..... 90

Ejercicios y cuestiones..... 91

TEMA 6.—**Introducción al espacio afín**..... 92

1. Vectores libres en el espacio..... 92
2. El espacio vectorial $(\mathbf{V}^3, +, \cdot\, \mathbb{R})$..... 93
3. Bases y coordenadas..... 93
4. Aplicaciones $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{V}^3$ y $\mathbf{V}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$..... 95
5. El espacio afín. Sistema de referencia..... 96
6. Componentes de un vector libre definido por dos puntos..... 97
7. Coordenadas del punto medio de un segmento..... 98
8. Ecuaciones de la recta en el espacio..... 98
9. Ecuaciones del plano..... 100
10. Ecuación del plano que pasa por tres puntos.. 103

Ejercicios y cuestiones..... 104

UNIDAD 3.—SUCESIONES. LIMITES. EL NUMERO *e*..... 106

TEMA 7.—**La recta real**..... 107

1. El orden en la recta real..... 107
2. Valor absoluto..... 110
3. Propiedades del valor absoluto..... 111
4. Conjuntos acotados. Axioma del extremo superior..... 113
5. Intervalos o segmentos en $\mathbb{R}$..... 116
6. Entorno de un punto..... 117
7. Recta ampliada $\overline{\mathbb{R}}$..... 118
8. Entorno de los puntos $-\infty$ y $+\infty$..... 118

Ejercicios y cuestiones..... 120

TEMA 8.—**Sucesiones de números reales**..... 121

1. Sucesiones de números reales..... 121
2. Determinación y representación de sucesiones. 123
3. Adición de sucesiones..... 126
4. Propiedades de la adición de sucesiones..... 127
5. Multiplicación de sucesiones..... 129
6. Propiedades de la multiplicación de sucesiones. 129
7. El espacio vectorial de las sucesiones..... 131
8. El anillo $(\mathbf{S}, +, \cdot)$ y el espacio vectorial $(\mathbf{S}, +, \cdot\, \mathbb{R})$. 133
9. Sucesiones monótonas..... 134
10. Sucesiones acotadas..... 136

Ejercicios y cuestiones..... 139

TEMA 9.—**Sucesiones convergentes**..... 140

1. Idea intuitiva de límite de una sucesión..... 140
2. Definición de límite. Sucesiones convergentes.. 143
3. Propiedades de los límites..... 146
4. Adición de sucesiones convergentes. El grupo $(\mathbf{S}_L, +)$..... 148
5. Multiplicación de sucesiones convergentes..... 150
6. Multiplicación de una sucesión convergente por un número real. El espacio vectorial $(\mathbf{S}_L, +, \cdot\, \mathbb{R})$. 153
7. Sucesiones nulas..... 154
8. Límite de sucesiones monótonas y acotadas... 156
9. Sucesiones monótonas contiguas..... 157

Ejercicios y cuestiones..... 160

TEMA 10.—**Cálculo de límites. El número** *e*..... 161

1. Límite de las sucesiones $\left(\frac{1}{n}\right), \left(\frac{k}{n}\right), \cdots, \left(\frac{k}{n^\alpha}\right)$; $\alpha \in \mathbb{N}^*$..... 161
2. Límite del cociente de polinomios en n..... 163
3. Límite de sucesiones con expresiones radicales... 165
4. El número *e*. Existencia..... 167

5. Cálculo aproximado del número e 170
6. Límite de la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 170
7. Límites infinitos 171
8. Cálculo con límites infinitos 173

Ejercicios y cuestiones 178

UNIDAD 4.—FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL. LIMITE Y CONTINUIDAD .. 180

TEMA 11.—**Operaciones con funciones** 181

1. Funciones reales de variable real 181
2. Representación gráfica de una función 182
3. Adición de funciones 183
4. Propiedades de la adición de funciones 185
5. El grupo $(\mathscr{F}(D, \mathbb{R}), +)$ 187
6. Multiplicación de funciones 188
7. Propiedades de la multiplicación de funciones. 188
8. El anillo $(\mathscr{F}(D, \mathbb{R}), +, \cdot)$ 190
9. Multiplicación de una función por un número real: Propiedades 190
10. El espacio vectorial $(\mathscr{F}(D, \mathbb{R}), +, \cdot\, \mathbb{R})$ 191
11. Composición de funciones 191
12. Función identidad 193
13. Función recíproca 193

Ejercicios y cuestiones 195

TEMA 12.—**Simetría, monotonía y acotación** 196

1. Simetrías de una función 196
2. Funciones monótonas crecientes 198
3. Funciones monótonas decrecientes 200
4. Propiedades de las funciones monótonas 200
5. Cociente incremental 201
6. Funciones acotadas 203
7. Propiedades de las funciones acotadas 205

Ejercicios y cuestiones 206

TEMA 13.—**Límite de funciones** 207

1. Límite de una función: Ideas previas 207
2. Límite de una función en un punto: Definiciones. 209
3. Propiedades de los límites 212
4. Límites y operaciones con funciones 214
5. Límites infinitos 216
6. Límites en el infinito. Asíntotas horizontales .. 218
7. Ramas parabólicas 222
8. Límites laterales 224

Ejercicios y cuestiones 227

TEMA 14.—**Continuidad de funciones reales** 228

1. Continuidad en un punto 228
2. Criterios de continuidad 231
3. Continuidad y operaciones con funciones 231
4. El espacio vectorial de las funciones continuas en $]a, b[$ 233
5. Algunos ejemplos importantes de funciones continuas 234
6. El anillo de las funciones continuas 235
7. Discontinuidades de una función 236

Ejercicios y cuestiones 238

UNIDAD 5.—FUNCIONES CIRCULARES. FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARITMICA 240

TEMA 15.—**Funciones circulares** 241

1. Noción intuitiva de ángulo orientado 241
2. El radián 242
3. Razones trigonométricas o circulares 243
4. Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo 245
5. Razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60° 247
6. Función seno 249
7. Función coseno 251
8. Función tangente 252
9. Función cosecante 253
10. Función secante 254
11. Función cotangente 254
12. Funciones trigonométricas recíprocas 254
13. Interpretación trigonométrica de la pendiente de una recta 257

Ejercicios y cuestiones 258

TEMA 16.—**Resolución de triángulos rectángulos**. 259

1. Reducción al primer cuadrante 259
2. Tablas naturales. Interpolación 264

3. Resolución de triángulos rectángulos 268
Ejercicios y cuestiones 271

TEMA 17.—**Las funciones exponencial y logarítmica** . 272

1. Potencia de exponente racional 272
2. Variación de las potencias de exponente racional. 274
3. Potencia de exponente real 276
4. Función exponencial de exponente real 277
5. La función $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ · Interés continuo .. 278
6. Definición de logaritmo: Propiedades 280
7. Función logarítmica: Propiedades 282
8. Logaritmos decimales 284
9. Manejo de las tablas 287
10. Cologaritmos 288
11. Cambio de base 289

Ejercicios y cuestiones 290

UNIDAD 6.—DERIVADAS Y PRIMITIVAS ... 292

TEMA 18.—**El concepto de derivada** 293

1. El concepto de recta tangente a una curva ... 293
2. Pendiente de una curva en un punto 294
3. Recta tangente a una curva 297
4. Velocidad de un móvil 298
5. Derivada de una función en un punto 299
6. Función derivada 301

Ejercicios y cuestiones 304

TEMA 19.—**Propiedades de las funciones derivables** . 305

1. Continuidad y derivabilidad 305
2. Derivada de una suma de funciones 306
3. Derivada del producto de una función por un número real 308
4. El espacio vectorial real $(\mathscr{D}(]a, b[), +, \cdot\, \mathbb{R})$ 308
5. Derivada de un producto de funciones 309
6. Derivada de un cociente de funciones 312
7. Derivación de las funciones polinómicas 313
8. Derivación de la función $f(x) = [v(x)]^n$ 314
9. Derivación de la función $y = \frac{k}{x^n}$ 315
10. Derivación de la función $y = f(x) = \sqrt{x}$ 315
11. Crecimiento y derivabilidad 316
12. Cuadro resumen de derivadas 318

Ejercicios y cuestiones 319

TEMA 20.—**Primitivas de una función** 320

1. Definición de primitiva de una función 320
2. Estructura del conjunto de primitivas de una función 321
3. Propiedades del cálculo de primitivas 323
4. Primitivas. Integrales inmediatas 324

Ejercicios y cuestiones 325

Complementos y ampliación 327

TABLAS 337

Unidad 1 APLICACIONES

Como en nuestro libro de primero, se dedica la primera Unidad a establecer y precisar conceptos que el alumno conoce en parte de sus estudios de E. G. B.

Además de las operaciones internas, que el alumno ya conoce, se estudia en esta Unidad el concepto de operación externa, que se aplicará en varias ocasiones a lo largo de este curso.

Aunque las relaciones de equivalencia fueron estudiadas en el primer curso, se consideran de nuevo en éste con el fin de estudiar las propiedades de las clases de equivalencia que se utilizarán después en el tema 3.

Las propiedades de las aplicaciones y de la función recíproca que aquí se estudian serán utilizadas después en los temas 11, 12 y 14.

Aparte de los conceptos que se estudian en este tema, en este segundo curso se utilizarán las nociones de grupo, anillo y cuerpo. (Ver Matemática 1.º Santillana.) Por esta razón, el alumno debe actualizar estos conocimientos antes de abordar el tema 2.

Tema 1

1. Correspondencias.
2. Relaciones binarias.
3. Relaciones de equivalencia.
4. Clases de equivalencia. Conjunto cociente.
5. Aplicaciones.
6. Aplicación identidad.
7. Operaciones internas.
8. Ley de composición externa.
9. Composición de aplicaciones.
10. Función recíproca o inversa.
11. Imagen directa de un subconjunto por una aplicación.
12. Imagen recíproca de un subconjunto por una aplicación.

Tema 1 APLICACIONES

En primer lugar se estudian las relaciones de equivalencia, dando las tres propiedades fundamentales de las clases. Los conceptos de aplicación inyectiva y suprayectiva se deben recordar antes de iniciar el estudio de la función recíproca en el apartado 10. *Finaliza el tema con el estudio de un teorema que relaciona la función recíproca con la composición de funciones.*

1 Correspondencias

Sean A y B dos conjuntos; una *correspondencia de A en B* es una terna $\Gamma = (A, B, G)$ donde G es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$, es decir: $G \subset A \times B$.

G se llama la *gráfica* o *grafo* de la correspondencia.

Ejemplos:

- Sean $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$; entonces $\Gamma = (\mathbb{N}, \mathbb{Z}, G)$, donde
$$G = \{(n, 2n - 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$$
es una correspondencia.

- Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$; entonces $\Gamma = (A, B, G)$, con $G = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$ es una correspondencia que se ha representado en la figura 1.

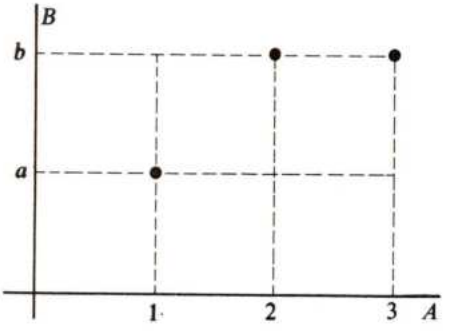


Fig. 1)

2 Relaciones binarias

Sea A un conjunto; una *relación binaria sobre A* es una correspondencia $\Gamma = (A, A, R)$.

Si $(x, y) \in R$, se dirá que x *está relacionado con y según R*, y se escribe $x\ R\ y$ o $(x, y) \in R$; en este caso contrario se escribe $x\ \not{R}\ y$ o $(x, y) \notin R$.

Ejemplo:

- Sea A el conjunto de todos los habitantes de una ciudad y sea $R = \{(x, y) \in A \times A \mid x \text{ es hermano de } y\}$; entonces $\Gamma = (A, A, R)$ es una relación binaria sobre A.

3 Relaciones de equivalencia

3.1. Sea A un conjunto y R una relación binaria sobre A; se dice que:

R es *reflexiva* si $\forall\, x \in A,\ (x, x) \in G$; es decir: $\forall x \in A,\ x\, R\, x$.

Ejemplos:

- En $\mathbb{N}$ la relación $x\, R\, y \iff x - y = \dot{2}$ es reflexiva, pues $\forall\, x \in \mathbb{N} \quad x - x = 0 = \dot{2}$, luego $\forall\, x \in \mathbb{N},\ x\, R\, x$.

- En $\mathbb{Z}$ la relación $x\, R\, y \iff x + y = 10$ *no* es reflexiva, pues $3 \not R\, 3$, ya que $3 + 3 = 6 \neq 10$.

3.2. R es *simétrica* si $\forall\, x,\ y \in A$

$$x\, R\, y \Longrightarrow y\, R\, x$$

Es decir: si un elemento está relacionado con otro, este último lo está con el primero.

Ejemplos:

- En $\mathbb{Z}$ la relación $x\, R\, y \iff x + y = 6$ es simétrica, pues $x\, R\, y \Longrightarrow x + y = 6 \Longrightarrow y + x = 6 \Longrightarrow y\, R\, x$.

- En $\mathbb{Q}$ la relación R definida por $x\, R\, y \iff x \leqslant y$ *no* es simétrica, pues $3\, R\, 7$, y sin embargo $7 \not R\, 3$.

3.3. R es *transitiva* si: $\forall x, y, z \in A$

$$\left.\begin{matrix} x\, R\, y \\ y\, R\, z \end{matrix}\right\} \Longrightarrow x\, R\, z$$

Ejemplos:

- Sea en $\mathbb{Z}$ la relación $x\, R\, y \iff x - y = \dot{3}$; entonces R es transitiva, ya que

$$\left.\begin{matrix} x\, R\, y \Longrightarrow x - y = \dot{3} \\ y\, R\, z \Longrightarrow y - z = \dot{3} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow (x - y) + (y - z) = \dot{3} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x - z = \dot{3} \Longrightarrow x\, R\, z$$

- Sea en $\mathbb{Z}$ la relación $x\, R\, y \iff x - y = 5$; entonces R *no* es transitiva, ya que por ejemplo

$$8\, R\, 3, \quad \text{pues} \quad 8 - 3 = 5$$
$$3\, R\, (-2), \quad \text{pues} \quad 3 - (-2) = 5$$

y sin embargo $8 \not R\, (-2)$, pues $8 - (-2) = 10 \neq 5$.

Ejercicios:

1. Se considera en $\mathbb{R}$ la relación S definida por $a\, S\, b \iff a^3 = b$. ¿Es S reflexiva?

2. Si R es la relación sobre $\mathbb{Z}$ definida por $x\, R\, y \iff x - y = \dot{5}$, ¿es R reflexiva?, ¿y simétrica?

3. Sea la relación R en el conjunto A de los habitantes de Madrid, $a\, R\, b \iff a$ es tío de b. ¿Es reflexiva? ¿Es simétrica? ¿Es transitiva?

4. ¿Es transitiva la relación R definida en $\mathbb{Z}$: $x\, R\, y \iff x + y = 18$?

3.4. Una relación R sobre un conjunto A se dice de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplos:

- Sea R la relación sobre $\mathbb{Z}$, definida por $x\,R\,y \iff x - y = \dot{3}$; entonces R es una relación de equivalencia (compruébelo el alumno).
- En el conjunto de las rectas del plano la relación $r\,R\,s \iff r$ es paralela a s es de equivalencia.

5. Se considera el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ y la relación R sobre A, $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

¿Es R de equivalencia?

6. La relación ser perpendiculares entre rectas del plano, ¿es de equivalencia?

4 Clases de equivalencia. Conjunto cociente

4.1. Sea A un conjunto y R una relación de equivalencia sobre A; si $x \in A$, se llama *clase de equivalencia del elemento* x o *clase asociada* a x *módulo* R, y se escribe $[x]$ al conjunto de todos los elementos de A relacionados con x; es decir:

$$[x] = \{a \in A \mid a\,R\,x\}$$

Ejemplo:

- Sea $A = \{a, b, c, d, f\}$ y la relación R definida por

  $G \subset A \times A$, $G = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (d, f), (f, d), (f, f), (d, d), (a, c), (c, a)\}$

  Se puede comprobar fácilmente que R es una relación de equivalencia.

  Las clases de equivalencia son:

  $$[a] = \{a, b, c\} = [b] = [c]$$
  $$[d] = \{d, f\} = [f]$$

4.2. Las clases de equivalencia poseen las propiedades siguientes:

a) Ninguna clase es vacía; así a la clase $[a]$ pertenece al menos el elemento a, ya que por ser R refexiva, $a\,R\,a$, $\forall\, a \in A$.

b) $b\,R\,a \iff [b] = [a]$.

c) La intersección de dos clases de equivalencia distintas es vacía.

d) Si R es una relación de equivalencia sobre A, la unión de todas las clases de equivalencia módulo R es A.

7. Se considera en $A = \{1, 3, a, b\}$ la relación $R = \{(1, 1), (3, 3), (a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}$

¿Es R de quivalencia sobre A?

En caso afirmativo, halla la clase del 1 y la de a, así como el conjunto cociente A/R.

8. Justifica que la igualdad en $A = \{1, 2, 3\}$ es una relación de equivalencia en A. ¿Cuál es el conjunto cociente?

9. En el conjunto de todos los triángulos del plano se define la relación

$T \sim T' \iff T$ y T' tienen el mismo área. ¿Es $\sim$ de equivalencia?

Vamos a probar la propiedad b):

Sea $x \in [b]$; entonces $x\ R\ b$. Como $b\ R\ a$, entonces $x\ R\ a$; luego $x \in [a]$ y por tanto $[b] \subset [a]$; análogamente se prueba que $[a] \subset [b]$, de donde $[b] = [a]$.

Recíprocamente: si $[a] = [b]$, como $a \in [a]$ será $a \in [b]$; luego $a\ R\ b$ y $b\ R\ a$.

Demostremos ahora al margen la propiedad c):

En este esquema queda demostrado que $[a] \cap [b] = \emptyset$, es decir, que dos clases de equivalencia distintas son disjuntas, ya que al suponer que tienen un elemento común se llega a una contradicción.

Para demostrar la propiedad d) basta probar que todo elemento $x \in A$ está en una de las clases; y en efecto: $x \in [x]$, según la propiedad a).

4.3. Sea A un conjunto y R una relación de equivalencia sobre A; se denomina *conjunto cociente de A para la relación R*, y se escribe A/R, al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia de A módulo R.

Ejemplo:

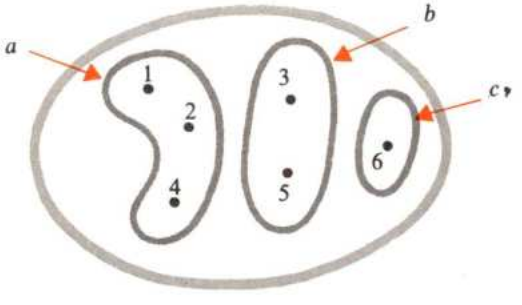
- Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y la relación

$$R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (4,2), (4,4), (1,4), (4,1), (3,3), (5,5), (3,5), (5,3), (6,6)\};$$

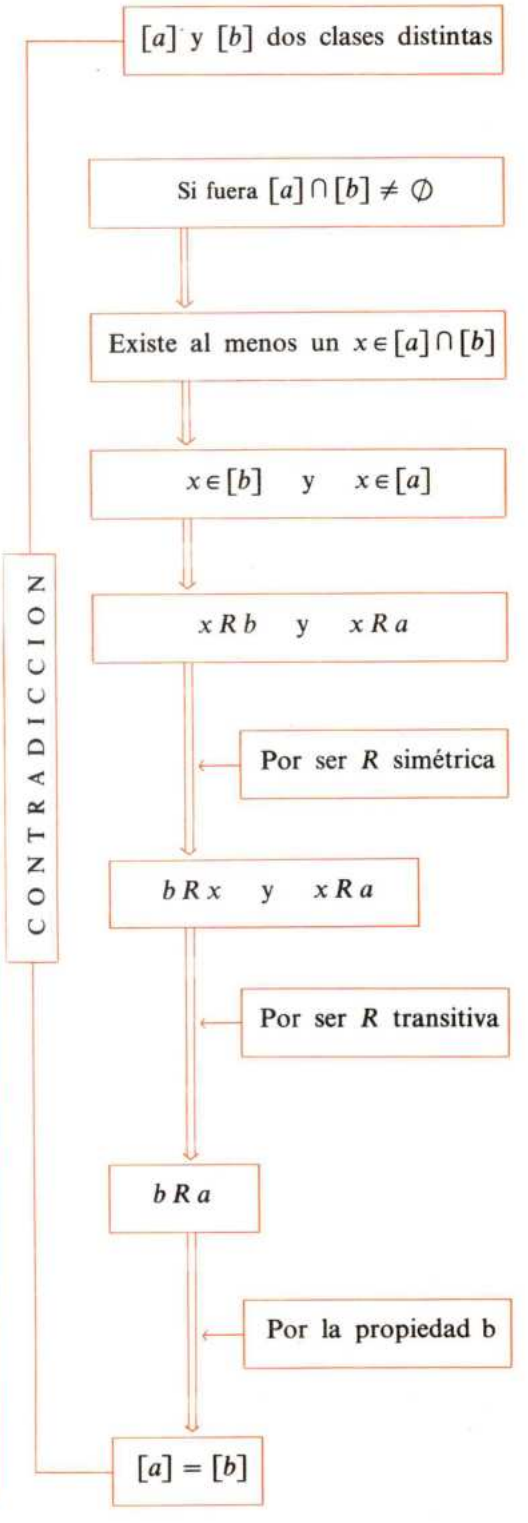
esta relación es de equivalencia y se tiene:

$$a = [1] = [2] = [4] = \{1, 2, 4\}$$
$$b = [3] = [5] = \{3, 5\}$$
$$c = [6] = \{6\}$$

luego el conjunto cociente $A/R = \{a, b, c\}$ (Fig. 2)



(Fig. 2)



5 Aplicaciones

5.1. Sean A y B dos conjuntos; una *aplicación de A en B* es una correspondencia $f = (A, B, G)$ tal que su grafo verifica la siguiente condición:

Para todo $a \in A$, existe uno y sólo un elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in G$.

Si $f = (A, B, G)$ es una aplicación de A en B y si $(a, b) \in G$, se suele escribir $b = f(a)$ y se dice que *b es la imagen de a por f*.

La aplicación $f = (A, B, G)$ es frecuente escribirla en la forma $f : A \longrightarrow B$, indicando a continuación la forma general del grafo $x \longrightarrow f(x)$.

Ejemplos:

- Sea $f = (A, B, G)$ donde $G = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$; entonces f es una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y suele escribirse

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow x^2$$

- Sea $f = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, G)$ donde $G = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right)\right\}$; entonces f *no* es una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, pues 0 no tiene imagen, ya que $\frac{1}{0}$ no tiene sentido en $\mathbb{R}$.

5.2. Es frecuente representar una correspondencia entre dos conjuntos finitos mediante un diagrama de flechas en donde si (a, b) pertenece al grafo de la correspondencia, entonces se traza una flecha que partiendo de a llega a b.

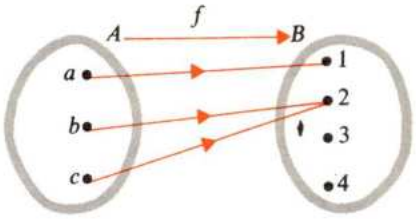
Con este tipo de representación, para que una correspondencia sea una aplicación es necesario que de cada elemento de A salga una flecha y sólo una (Fig. 3).

Si $f : A \longrightarrow B$ es una aplicación, A se llama el *dominio de f*, B el *codominio de f*.

Las correspondencias representadas en las figuras 4 y 5 no son aplicaciones.

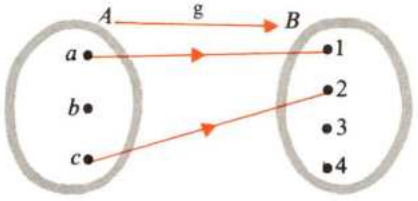
5.3. El conjunto de todas las imágenes de los elementos de A por f se dice que es la *imagen de f* y se escribe $\mathrm{Im}(f)$ o $f(A)$; se tiene pues:

$$\mathbf{f(A) = Im\ (f) = \{f(x) \mid x \in A\}}$$



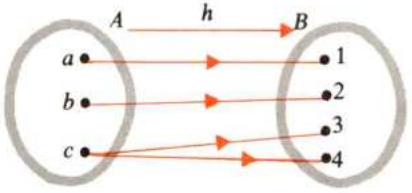
(Fig. 3)

f es aplicación:



(Fig. 4)

g *no* es aplicación, pues b no posee imagen:



(Fig. 5)

h *no* es aplicación, pues c posee dos imágenes:

10. La correspondencia $\Gamma = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, G)$, donde $G = \left\{\left(x, \frac{1}{x^2}\right)\right\}$ ¿es una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$? ¿Y de $\mathbb{R}^*$ en $\mathbb{R}$?

Ejemplo:

- En la función $f : \{a, b, c\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ definida por $\{(a, 1), (b, 2), (c, 2)$ se tiene: $\mathrm{Im}(f) = \{1, 2\}$.

Observa que en general $\mathrm{Im}(f) \neq B$, es decir, la imagen no coincide en general con el codominio.

11. Sean $A = \{a, b\}$

$B = \{1, 2, 3\}$

$G = \{(a, 1), (a, 2), (b, 3)\}$

¿Es $f = (A, B, G)$ una aplicación de A en B?

¿Y $g = (B, A, G)$?

6 Aplicación identidad

Sea A un conjunto; se denomina aplicación *identidad de A*, y se escribe 1_A, a la aplicación $1_A = (A, A, \Delta)$, donde Δ es la diagonal de $A \times A$, es decir, $\Delta = \{(x, x) \mid x \in A\}$; en otras palabras: $1_A : A \longrightarrow A$ está definida por $1_A(x) = x$, $\forall\, x \in A$.

7 Operaciones internas

Sea X un conjunto; una *operación interna sobre X* o *una ley de composición interna sobre X* es una aplicación $\perp$:

$$\perp : X \times X \longrightarrow X.$$

La imagen del par (x, y) por $\perp$ se suele escribir $x \perp y$, en vez de la notación usual $\perp(x, y)$, y se llama el *resultado de la operación para el par* (x, y). También se dice que $x \perp y$ es el compuesto de x e y.

Ejemplos:

- Sea $X = \mathbb{N}$ y $\perp : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la aplicación que asocia a cada par de números naturales su suma; entonces $\perp$ es una operación interna sobre $\mathbb{N}$ que se llama la *suma de números naturales.*

- Sea $X = \mathbb{Q}$ y $\perp : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ la aplicación definida por $\perp(x) = \dfrac{x + y}{2}$; entonces $\perp$ es una operación interna sobre $\mathbb{Q}$ que se denominan la *media aritmética* de x e y; se escribe

$$x \perp y = \frac{x + y}{2}$$

12. Sobre $\mathbb{Q}$ la correspondencia definida por $x \perp y = \dfrac{x}{y}$, ¿es una ley de composición interna?

13. Se considera en $\mathbb{N}$ la correspondencia definida por

$$x \perp y = \frac{2x + y}{3}$$

¿Es una operación interna sobre $\mathbb{N}$? ¿Y sobre $\mathbb{Q}$?

- Sea $X = \mathbb{N}$; la correspondencia $\perp$ que asocia a cada par de números naturales (x, y) su diferencia $x - y$ *no* es una operación interna, pues no es una aplicación de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, ya que por ejemplo

$$2 \perp 3 = 2 - 3 \notin \mathbb{N}$$

14. En $\mathbb{N}$ a cada par de elementos, x, y, se le asocia su máximo común divisor, es decir, $x \perp y = \text{mcd}\,(x, y)$. ¿Se define así una operación interna sobre $\mathbb{N}$?

8 Ley de composición externa

Sean A y B dos conjuntos; por una *ley de composición externa sobre B con dominio de operadores A* se entiende una aplicación $f : A \times B \longrightarrow B$.

Nota: Es evidente que toda ley de composición interna sobre A puede considerarse como una ley de composición externa sobre A en la que el dominio de operadores es el propio A; es decir, que el concepto de operación externa es más general que el de operación interna.

Ejemplos:

- Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ que asocia a cada par (n, r) el número real $(n, r) = +\sqrt[n]{r}$; entonces f es una ley de composición externa sobre $\mathbb{R}_+$ con dominio de operadores $\mathbb{N}$.

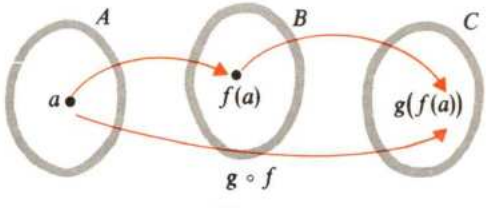
- Sea $B = \mathbb{R}^2$, y consideremos la aplicación $f : \mathbb{R} \times B \longrightarrow B$ definida por $f(\alpha, (x, y)) = (\alpha x, \alpha y)$; entonces f es una ley de composición externa sobre $B = \mathbb{R}^2$ con dominio de operadores $\mathbb{R}$, que será estudiada en el tema 2.

Nota: En adelante, si f es una ley externa sobre B con dominio de operadores A, $f(a, x)$ se escribirá ax.

9 Composición de aplicaciones

Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos aplicaciones; se define la *composición* $g \circ f$ como la aplicación $g \circ f : A \longrightarrow C$ definida por $(g \circ f)(a) = g[f(a)]$.

Como indica la figura 6, para hallar la imagen por la composición $g \circ f$ de un elemento $a \in A$, se halla la imagen por f de a, es decir $f(a)$, y a continuación la imagen de éste por g.



(Fig. 6)

Ejemplos:

- Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 2x - 1$ y $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida por $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$; entonces $g \circ f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ viene definida por $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$. Si llamamos $f(x) = u$, se tiene:

$$(g \circ f)(x) = g(u) = \frac{1}{u^2 + 1}, \text{ como } u = f(x) = 2x - 1, \text{ resulta:}$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{u^2 + 1} = \frac{1}{(2x - 1)^2 + 1} = \frac{1}{4x^2 - 4x + 2}$$

- Sea $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x - 3$; entonces $g \circ f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ viene definida por

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^2 + 1) = (x^2 + 1) - 3 = x^2 - 2$$

15. ¿Se pueden componer las aplicaciones

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow 3x - 2$$

$$\text{y } g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad x \longrightarrow \frac{x + 1}{2}?$$

16. Sean las aplicaciones

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \; x \longrightarrow x - 1$$

$$g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}, \; x \longrightarrow \frac{2x + 3}{5}$$

Halla $g \circ f$. ¿Está definida $f \circ g$?

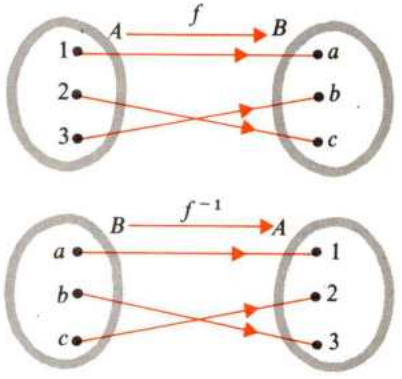
17. En las funciones del ejercicio 16, ¿cuál es el dominio de $g \circ f$? ¿Y el codominio?

10 Función recíproca o inversa

10.1. Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación biyectiva, es decir, inyectiva y suprayectiva; en este caso, como f es suprayectiva, para cada $b \in B$ existe un a tal que $f(a) = b$, y como f es inyectiva, este a es único; podemos entonces definir una aplicación $f^{-1} : B \longrightarrow A$ de la siguiente forma: si $b \in B$ y $a \in A$ es el único elemento tal que $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$.

La figura 7 muestra la función f y la f^{-1}. Observa que esta función se obtiene a partir de la f, invirtiendo el sentido de las flechas.

La función f^{-1} se llama la *recíproca* o *inversa de* f. Observa que el dominio de f^{-1} es el codominio de f y el codominio de f^{-1} es el dominio de f.



(Fig. 7)

Ejemplos:

- Sea $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = x - 1$; entonces f es biyectiva (compruébelo el alumno). La recíproca $f^{-1} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ será tal que $f^{-1}(x) = y$, donde $f(y) = x$, de aquí que $y - 1 = x$, de donde $y = x + 1$, y por tanto $f^{-1} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, x \longrightarrow x + 1$, es decir, $f^{-1}(x) = x + 1$.

- Sea $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f(x) = 3x + 5$; entonces $f^{-1} : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ será tal que $f^{-1}(x) = y$ donde $f(y) = x$; como $f(y) = 3y + 5$, se tiene $3y + 5 = x$, de donde $y = \dfrac{x - 5}{3}$ y $f^{-1} : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ viene definida por $f^{-1}(x) = y = \dfrac{x - 5}{3}$.

18. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 4$. ¿Es f biyectiva? En caso afirmativo, halla la función recíproca f^{-1}.

19. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 1$. ¿Tiene f función recíproca? En caso afirmativo, hállala.

10.2. *Sean* $f: A \longrightarrow B$ *una aplicación biyectiva y* $f^{-1}: B \longrightarrow A$ *la recíproca de* f*; entonces se verifica que* $f \circ f^{-1} = 1_B$ *y* $f^{-1} \circ f = 1_A$.

Los esquemas siguientes ayudan a comprender este teorema:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f^{-1}} A \qquad B \xrightarrow{f^{-1}} A \xrightarrow{f} B$$
$$x \longrightarrow y \longrightarrow x \qquad y \longrightarrow x \longrightarrow y$$

Ejemplo:

- Sea $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f(y) = 3y + 5$.

  Se ha visto que $f^{-1}: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ viene definido por $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{3}$

  $$(f^{-1} \circ f)(y) = f^{-1}[f(y)] = f^{-1}(3y+5) = \frac{3y+5-5}{3} = y = 1_{\mathbb{Q}}(y)$$

11 Imagen directa de un subconjunto por una aplicación

11.1. Consideremos la aplicación $f: A \longrightarrow B$ representada en la figura 8. Hemos visto que la imagen por f de A es el conjunto de todos los elementos de B que son imagen de algún elemento de A; en nuestro caso

$$f(A) = \{1, 3, 4, 5\},$$

ya que 1 es imagen de $a (f(a) = 1)$, análogamente 3, 4 y 5 son imágenes de algún elemento de A; sin embargo, $2 \notin f(A)$, pues 2 *no* es imagen por f de ningún elemento de A.

Según esto, podemos escribir

$$\mathbf{Im\ (f) = f(A) = \{y \in B \mid \exists x \in A,\ f(x) = y\}}$$

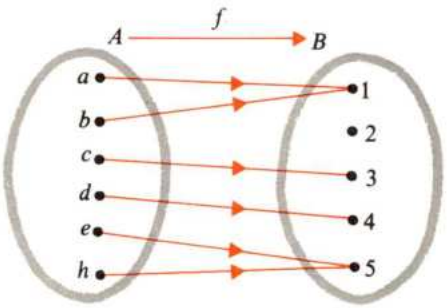
En vez de buscar las imágenes de todos los elementos de A, podemos buscar las imágenes de algunos elementos de A solamente. Por ejemplo, las imágenes de a y c son 1 y 3, esto se escribe

$$f(\{a, c\}) = \{1, 3\}$$

y se dice que $\{1, 3\}$ es la *imagen directa de* $\{a, c\}$ *por* f.

Ejemplos:

- $f(\{a\}) = \{1\}$
- $f(\{a, b\}) = \{1\}$
- La imagen directa de $\{d, h\}$ por f es $\{4, 5\}$.



(Fig. 8)

Así pues, dada una aplicación $f : A \longrightarrow B$, a cada subconjunto X de A se le puede hacer corresponder el subconjunto de B formado por todos los elementos de B que son imagen de algún elemento de X.

Esto conduce a la siguiente definición:

11.2. Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación y $X \subset A$; *se llama imagen directa de X por f, y se escribe $f(X)$, al conjunto formado por todos los elementos de B que son imágenes de alguno de X.*

Es decir:

$$\mathbf{f(X) = \{b \in B \mid \exists x \in X,\ f(x) = b\}}$$

Ejemplos:

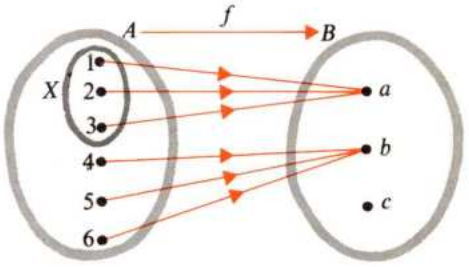
- En la figura 9 se ha indicado la imagen directa por f de $X = \{1, 2, 3\}$, que resulta ser $f(X) = \{f(1),\ f(2),\ f(3)\} = \{a\}$.
- Consideremos la aplicación $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 1$ y sea $X = \{1, 2, 3, 10\}$; entonces

$$f(X) = \{f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(10)\} = \{1, 3, 5, 19\}$$

La siguiente propiedad es importante y será utilizada más adelante.

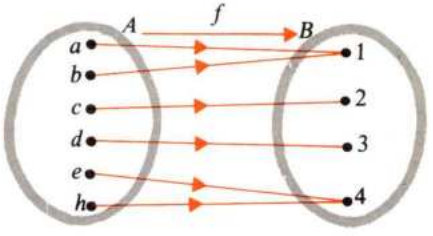
Si $f : A \longrightarrow B$ es una aplicación y si X_1 y X_2 son dos subconjuntos de A, entonces si $X_1 \subset X_2$ se verifica que $f(X_1) \subset f(X_2)$.

Tenemos que demostrar que todo elemento de $f(X_1)$ es un elemento de $f(X_2)$; sea $z \in f(X_1)$, entonces z es imagen de algún elemento de X_1, es decir, existe un $x \in X_1$ tal que $f(x) = z$; como $X_1 \subset X_2$, también será $x \in X_2$, luego z es imagen de un elemento de X_2, es decir: $z \in f(X_2)$, como queríamos demostrar.



(Fig. 9)

20. Sea la aplicación f del diagrama



Halla:

a) $f(\{a\})$; b) $f(\{a, c\})$;
c) $f(\{a, b, c\})$; d) $f(\{b, c\})$.

21. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x$.

Halla: $f(\{3, 5, 7\})$.

22. Considera la aplicación $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 3x + 2$ y sea $A = \{2, 3, 5\}$ y $B = \{-1, 0, 8\}$. Calcula $f(A)$, $f(B)$ y $f(A \cup B)$ y comprueba que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

12 Imagen recíproca de un subconjunto por una aplicación

12.1. Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación; en el apartado anterior hemos visto que dado un subconjunto X de A, le podíamos asociar el subconjunto de B formado por los elementos que eran imágenes de los elementos de X. Ahora nos vamos a plantear el problema al revés: dado un subconjunto Y de B, ¿qué elementos de A tienen sus imágenes en Y?

Sea, por ejemplo, la aplicación $f : A \longrightarrow B$ dibujada en la figura 10; entonces si $Y = \{a, c\}$, el conjunto de los elementos de A cuya imagen pertenece a Y es $\{1, 2, 5\}$.

En el mismo ejemplo el conjunto de los elementos de A cuya imagen pertenece a $Y' = \{d\}$ es $\emptyset$, pues ningún elemento de A tiene por imagen d.

Esto conduce a la siguiente definición:

12.2. *Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación y sea Y un subconjunto de B; se llama imagen recíproca o inversa de Y por f, y se escribe $f^{-1}(Y)$, al conjunto de todos los elementos de A cuya imagen pertenece a Y.*

En símbolos:

$$\mathbf{f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}}$$

Ejemplos:

- Sea la aplicación $f: A \longrightarrow B$ indicada en la figura 11; entonces si $Y = \{1, 2\}$, se tiene que $f^{-1}(Y) = \{a, b, c\}$.

- Consideremos la aplicación $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$; entonces si $Y = \{1, 4, 7\}$,

  $$f^{-1}(Y) = \{1, -1, 2, -2, \sqrt{7}, -\sqrt{7}\},$$

  ya que

  $$x \in f^{-1}(Y) \Longleftrightarrow f(x) \in Y \Longleftrightarrow x^2 \in Y \Longleftrightarrow x^2 = 1,\ x^2 = 4$$

  o $x^2 = 7$, de donde

  $$x = \pm 1,\ x = \pm 2 \quad \text{o} \quad x = \pm\sqrt{7}$$

12.3. Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación; se verifican las siguientes relaciones:

a) Si $Y_1 \subset Y_2$ son dos subconjuntos de B, entonces

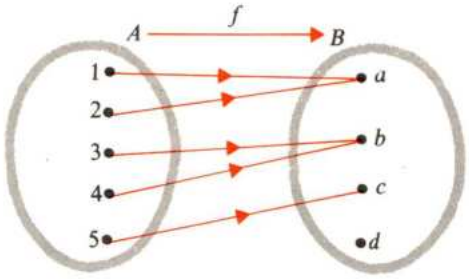
$$f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$$

b) Si X es un subconjunto de A, entonces $X \subset f^{-1}(f(X))$.

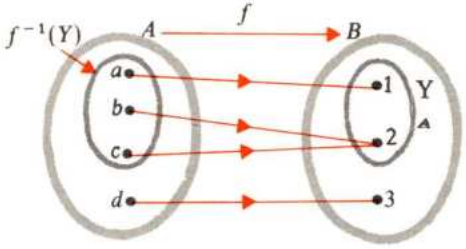
c) Si Y es un subconjunto de B, entonces $f(f^{-1}(Y)) \subset Y$.

12.4. Vamos a demostrar la parte a) del teorema **12.3.**

Sea $x \in f^{-1}(Y_1)$; entonces la imagen de x pertenece a Y_1, es decir, $f(x) \in Y_1$; como $Y_1 \subset Y_2$, entonces $f(x) \in Y_2$, luego $x \in f^{-1}(Y_2)$; por tanto, $f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$, como queríamos demostrar.

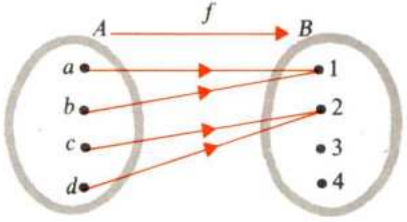


(Fig. 10)



(Fig. 11)

23. Sea $f : A \longrightarrow B$ la aplicación representada por el diagrama siguiente:



Halla:

a) $f^{-1}(\{3\})$
b) $f^{-1}(\{3, 2\})$
c) $f^{-1}(1)$
d) $f^{-1}(B)$

24. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.

Halla:

a) $f^{-1}(\{9, 16, +25\})$
b) $f^{-1}(\{-81, -36\})$
c) $f^{-1}(\{16, 100\})$
d) Comprueba con los conjuntos de los apartados a) y c) que:

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

12.5. Demostremos la parte b) del teorema **12.3.**

Sea $x \in X$; entonces $y = f(x)$ es la imagen por f de x, luego $y \in f(X)$, y si la imagen de x está en $f(X)$, eso quiere decir que $x \in f^{-1}(f(X))$.

Vamos a demostrar finalmente la parte c) del teorema **12.3.**

12.6. Sea $y \in f(f^{-1}(Y))$; esto quiere decir que y es la imagen de algún elemento de $f^{-1}(Y)$, es decir, $y = f(z)$ con $z \in f^{-1}(Y)$; pero si $z \in f^{-1}(Y)$, eso quiere decir que su imagen pertenece a Y, esto es, $f(z) \in Y$; como $y = f(z)$, resulta que $y \in Y$, luego $f(f^{-1}(Y)) \subset Y$.

En la figura 12 se ha puesto un ejemplo de este último caso; observa que, en general, Y y $f(f^{-1}(Y))$ *no* son iguales.

12.7. Sean $f: A \longrightarrow B$ y $g: B \longrightarrow C$ dos aplicaciones y

$$g \circ f : A \longrightarrow C$$

la aplicación compuesta; si X es un subconjunto de C, se verifica:

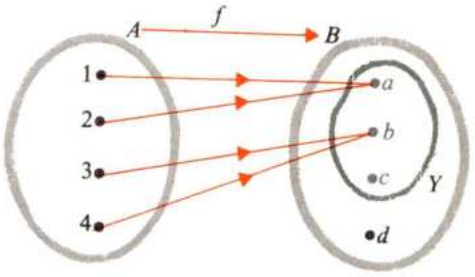
$$(g \circ f)^{-1}(X) = f^{-1}(g^{-1}(X))$$

Demostración:

Sea $x \in (g \circ f)^{-1}(X)$; entonces $(g \circ f)(x) \in X \Longrightarrow g(f(x)) \in X$, por tanto $f(x) \in g^{-1}(X)$ y $x \in f^{-1}(g^{-1}(X))$. Resulta, entonces, que $(g \circ f)^{-1}(X) \subset f^{-1}(g^{-1}(X))$ ①.

Recíprocamente: si $x \in f^{-1}(g^{-1}(X))$, entonces $f(x) \in g^{-1}(X)$, de donde $g(f(x)) \in X$, es decir, $(g \circ f)(x) \in X$, luego $x \in (g \circ f)^{-1}(X)$, y de aquí que $f^{-1}(g^{-1}(X)) \subset (g \circ f)^{-1}(X)$ ②.

De ① y ② se sigue que $(g \circ f)^{-1}(X) = f^{-1}(g^{-1}(X))$.



$Y = \{a, b, c\}$

$f^{-1}(Y) = \{1, 2, 3, 4\}$

$f(f^{-1}(Y)) = \{a, b\}$

$f(f^{-1}(Y)) \neq Y$

(Fig. 12)

Ejercicios y cuestiones

25. Sean $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Es $\Gamma = (A, B, G)$ una correspondencia de A en B, siendo $G = \{(1, a), (1, x), (3, c), (5, c), (5, d)\}$? ¿Y si $G = \{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d)\}$? En caso afirmativo, haz una representación gráfica de Γ.

26. Se considera en $\mathbb{Z}$ la relación $x\,R\,y \iff x - y = \dot{6}$. ¿Es de equivalencia?

27. Se considera en $\mathbb{N}$ la relación $x\,S\,y \iff x + 2y = 10$. Estúdiala.

28. La relación en $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dada por el conjunto de pares

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 1)\},$$

¿es de equivalencia? En caso afirmativo, halla la clase de 3 y el conjunto cociente A/R.

29. En el conjunto C de las circunferencias del plano se define la relación $\sim$: $C_1 \sim C_2$ si y sólo si C_1 y C_2 son concéntricas. ¿Es $\sim$ de equivalencia? En caso afirmativo, halla el conjunto cociente.

30. Sea $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3}$ y $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$. Halla $g \circ f$.

31. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 5$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 3x^2 + 9$. Halla $g \circ f$ y $f \circ g$.

32. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + 8$. ¿Es f biyectiva? En caso afirmativo, halla la función recíproca f^{-1}.

33. Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{a, b, c, d, e\}$; se considera la aplicación $f : A \longrightarrow B$ definida por $f(1) = b$, $f(2) = c$, $f(3) = d$, $f(4) = e$, $f(5) = a$. Halla f^{-1}.

34. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 1$ y sean

$$A = \{-1, 2, 3\} \quad \text{y} \quad B = \{0, 1, 3\}$$

Halla $f(A)$, $f(B)$, $f(A \cup B)$, $f(A \cap B)$ y comprueba que

$$f(A) \cup f(B) = f(A \cup B) \quad \text{y} \quad f(A) \cap f(B) \neq f(A \cap B)$$

35. Demuestra que si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación y A y B son subconjuntos de X, se tiene:

$$f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$$

36. Sea $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x - 7}{5}$ y sea

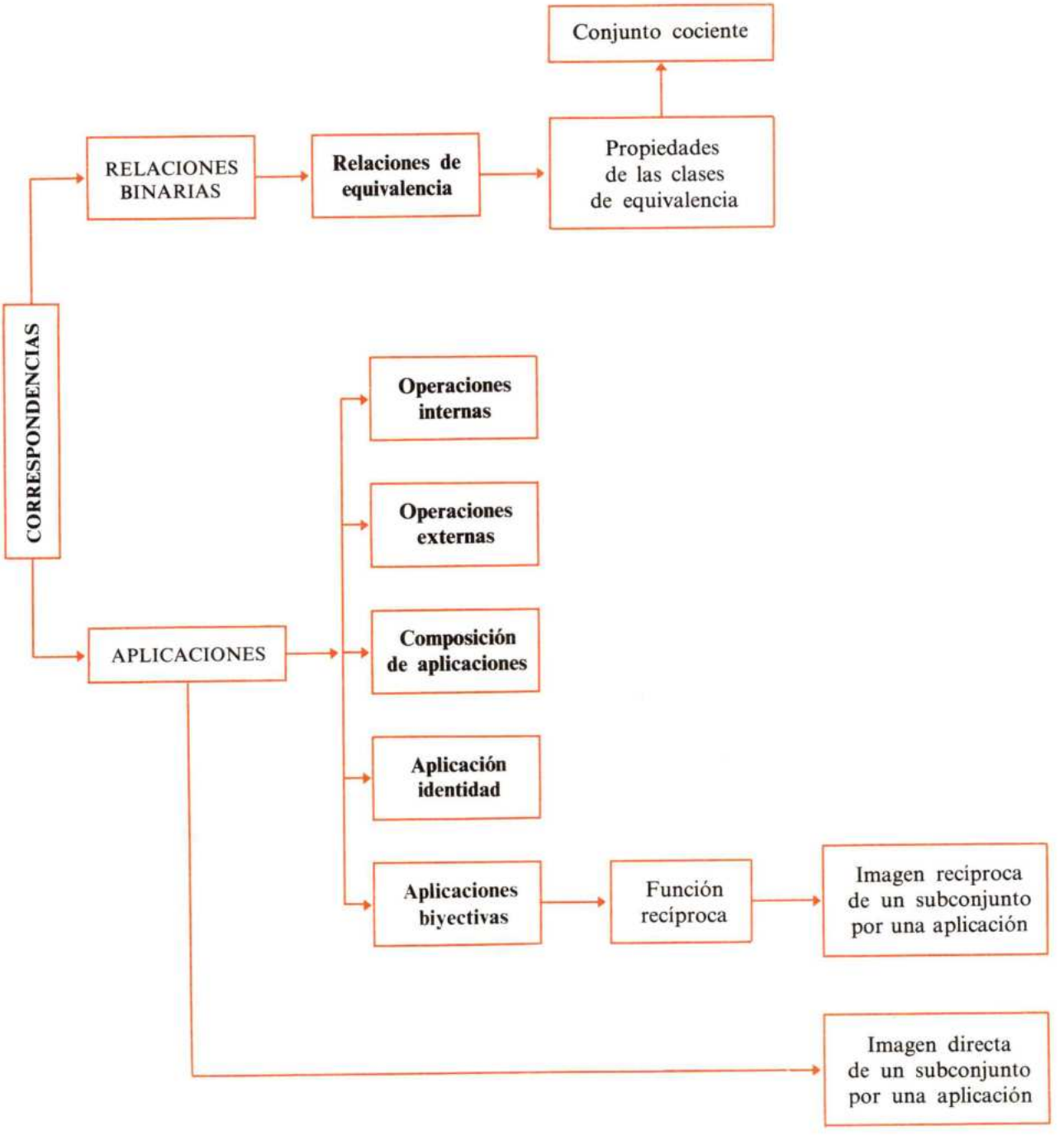
$$A = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 8, -\frac{3}{2}\right\} \qquad \text{y} \qquad B = \left\{3, \frac{2}{3}, -\frac{4}{5}\right\}$$

Halla $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$, $f^{-1}(A \cup B)$ y $f^{-1}(A \cap B)$ y comprueba que

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \quad \text{y} \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

DIAGRAMA ESTRUCTURAL DE LA UNIDAD 1

APLICACIONES



Unidad 2 GEOMETRIA VECTORIAL Y AFIN

Esta Unidad se ocupa del estudio de una nueva estructura algebraica: la del espacio vectorial. En las estructuras estudiadas hasta ahora por el alumno –grupos, anillos, etcétera–, las operaciones que se definían eran siempre operaciones internas; en un espacio vectorial aparecen dos operaciones: una interna y otra externa.

Aunque históricamente los espacios vectoriales formales surgieron al estudiar el espacio vectorial de los vectores libres del plano, hoy día esta estructura es aplicable a entes de distinta naturaleza. En este libro aparecen espacios vectoriales en los temas 2, 3, 6, 8, 9, 11, 14 y 19.

El tema 4 se dedica al estudio del plano afín y el tema 5 al estudio de las diversas formas de la ecuación de la recta. El bloque de geometría acaba con una introducción al espacio afín en el tema 6.

Tema 2

1. $\mathbb{R}^2$: Definición y notaciones.
2. Igualdad de vectores numéricos.
3. Adición en $\mathbb{R}^2$.
4. Propiedades de la adición en $\mathbb{R}^2$.
5. Multiplicación de vectores por números reales.
6. Propiedades del producto de un vector por un número real.
7. El espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot\, \mathbb{R})$.
8. Dependencia e independencia lineal.
9. Bases y coordenadas.
10. El espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot\, \mathbb{R})$.
11. El espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot\, \mathbb{R})$.

Tema 3

1. Vectores fijos.
2. Equipolencia de vectores fijos.
3. El conjunto $\mathbf{V}^2$ de los vectores libres del plano.
4. Caracterización de un vector libre.
5. Adición de vectores libres.
6. Propiedades de la adición.
7. Producto de un vector libre por un número real.
8. Propiedades del producto por escalares.
9. El espacio vectorial $(\mathbf{V}^2, +, \cdot\, \mathbb{R})$.
10. Bases y coordenadas.

Tema 4

1. Correspondencia entre puntos del plano y vectores libres.
2. Correspondencia entre los espacios vectoriales $\mathbf{V}^2$ y $\mathbb{R}^2$.
3. Plano afín. Sistema de referencia afín.
4. Coordenadas cartesianas en el plano afín.
5. Cambio de base en el espacio vectorial $\mathbf{V}^2$.
6. Cambio de sistema de referencia en el plano afín.
7. Primeras aplicaciones.

Tema 5

1. Ecuación vectorial de la recta.
2. Ecuaciones paramétricas, continua y general de la recta.
3. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.
4. Pendiente de una recta.
5. Ecuación explícita de la recta.
6. Ecuación segmentaria de la recta.
7. Esquema de las ecuaciones de la recta.
8. Incidencia de puntos y rectas.
9. Incidencia de rectas.
10. Paralelismo de rectas.
11. Recta paralela a otra por un punto. Haz de rectas paralelas.

Tema 6

1. Vectores libres en el espacio.
2. El espacio vectorial $(\mathbf{V}^3, +, \cdot\, \mathbb{R})$.
3. Bases y coordenadas.
4. Aplicaciones
   $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{V}^3$ y $\mathbf{V}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
5. El espacio afín. Sistema de referencia.
6. Componentes de un vector libre definido por dos puntos.
7. Coordenadas del punto medio de un segmento.
8. Ecuaciones de la recta en el espacio.
9. Ecuaciones del plano.
10. Ecuación del plano que pasa por tres puntos.

Tema 2 ESPACIOS VECTORIALES

En este primer tema de geometría vectorial se inicia el estudio de una nueva estructura matemática: el espacio vectorial. *Se hace desarrollando detenidamente un espacio vectorial importante:* $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. *Este conjunto de todos los pares de números reales puede recibir, entre otras, dos estructuras importantes muy distintas, según sean las operaciones que se definan entre sus elementos:*

a) *Una estructura de cuerpo. (El cuerpo de los números complejos, estudiado en el* $1.^{er}$ *curso.)*

b) *Una estructura de espacio vectorial.*

El conjunto $\mathbb{R}^2$ *se convierte en un espacio vectorial cuando en él se definen la adición y una multiplicación de elementos de* $\mathbb{R}^2$ *por números reales que aparecen en este tema.*

Una vez estudiado $\mathbb{R}^2$, *se generaliza a* $\mathbb{R}^3$, *y finalmente a* $\mathbb{R}^n$.

1 $\mathbb{R}^2$: Definición y notaciones

Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales. $\mathbb{R}^2$ designa el conjunto de todos los pares de números reales.

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplos:

- $(3, 2)$, $(1, -\sqrt{2})$, ... son elementos de $\mathbb{R}^2$.
- $(3 + 2i, 1)$, ... no es elemento de $\mathbb{R}^2$, ya que $3 + 2i \notin \mathbb{R}$.

Los elementos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se llamarán *vectores*. Cuando un vector (x, y) se simbolice con una letra, se pondrá una flecha encima. Así:

$$\vec{u} = (x, y),\ \vec{v} = (x', y'),\ \vec{a} = (2, 3),\ \vec{e}_1 = (1,0), \ldots$$

Ejercicios:

1. Escribe cinco pares de elementos de $\mathbb{R}^2$. Escribe otros pares que no lo sean.

2. Si consideramos $\mathbb{R}^2$ como producto cartesiano, ¿cuál es la condición para que los pares (x_1, y_1) y (x_2, y_2) sean iguales?

3. Determina a y b para que se verifique
$$(2a, 3b) = (4, 12)$$

4. Se tiene la siguiente relación entre elementos de $\mathbb{R}^2$: $(2a + 3b, a - b) = (7, 1)$
Halla a y b.

2 Igualdad de vectores

Se dice que dos vectores son iguales cuando lo son considerados como elementos del producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Si (x, y) y (x', y') son vectores de $\mathbb{R}^2$ entonces,

$$(\mathbf{x, y}) = (\mathbf{x', y'}) \Longleftrightarrow (\mathbf{x = x'}) \quad \mathbf{e} \quad (\mathbf{y = y'})$$

Dos vectores son desiguales cuando difieren en alguna de sus componentes.

$$(\mathbf{x, y}) \neq (\mathbf{x', y'}) \Longleftrightarrow (\mathbf{x \neq x'}) \quad \mathbf{o} \quad (\mathbf{y \neq y'})$$

Ejemplos:

- $(3, 2) = (3, 2)$, ya que sus componentes son iguales.
- $(3, 5) \neq (3, 1)$, ya que $5 \neq 1$.
- Nótese que $(1, 2) \neq (2, 1)$ y que $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

5. Los vectores $\vec{x} = (3, 2)$ e $\vec{y} = (2a, 3b)$ son iguales. Calcula a y b.

6. Los vectores $(\sqrt{2}, a)$ y $(b, \sqrt{2})$ son iguales. Halla a y b.

7. Si $X = \{1, 3, 5, 7\}$ escribe todos los vectores posibles de $\mathbb{R}^2$ con los elementos de X.

8. ¿Son iguales los vectores $\left(\frac{1}{2}, \frac{6}{8}\right)$ y $\left(\frac{4}{8}, \frac{9}{12}\right)$?

3 Adición en $\mathbb{R}^2$

Sean $\vec{u} = (x, y)$ y $\vec{v} = (x', y')$ dos vectores de $\mathbb{R}^2$. *Se llama suma de dichos vectores, y se designa por* $(x, y) + (x', y')$, *el vector dado por* $(x + x', y + y')$, es decir

$$\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} = (\mathbf{x, y}) + (\mathbf{x', y'}) = (\mathbf{x + x',\ y + y'})$$

Como la suma de números reales es otro número real, resulta que $(x + x',\ y + y') \in \mathbb{R}^2$, luego la adición definida es una operación interna en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplos:

- $(3, 5) + (1, -1) = (3 + 1, 5 + (-1)) = (4, 4)$
- $(-1, 3) + (2, -1) = (-1 + 2, 3 + (-1)) = (1, 2)$
- Calculemos x e y sabiendo que $(x, y) + (2, 3) = (4, 7)$

$$\left.\begin{matrix} x + 2 = 4 \\ y + 3 = 7 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \quad \text{Luego } (x, y) = (2, 4)$$

9. Suma los siguientes vectores:

a) $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{7}\right)$ y $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$

b) $\left(\frac{1}{3}, -2\right)$ y $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$

Nota: En la adición de vectores

$$(x, y) + (x', y') = (x + x',\ y + y'),$$
$$\text{①} \qquad\quad \text{②} \qquad \text{③}$$

se emplea el mismo signo (+) que para la adición de números reales, pero conviene tener presente que en ① el signo (+) es el de la adición de vectores, mientras que en ② y ③ el (+) es el signo de la adición de números reales.

4 Propiedades de la adición en $\mathbb{R}^2$

La adición de vectores tiene las siguientes propiedades:

4.1. *Propiedad asociativa.*

Si $\vec{u} = (x, y)$, $\vec{v} = (x', y')$ y $\vec{z} = (x'', y'')$ son tres vectores de $\mathbb{R}^2$, se verifica:

$$[(x, y) + (x', y')] + (x'', y'') = (x, y) + [(x', y') + (x'', y'')]$$

Ejemplo:

- Si $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (0, 1)$ y $\vec{w} = (-1, -1)$, entonces se tiene:

$$\left.\begin{array}{l}(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (2, 2) + (-1, -1) = (1, 1)\\ \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (2, 1) + (-1, 0) = (1, 1)\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

Al margen se demuestra la propiedad asociativa: en ①, ②, ③ y ④ se aplica la definición de suma en $\mathbb{R}^2$, y en ⑤ la propiedad asociativa de la adición de números reales.

4.2. *Existe elemento neutro.*

El elemento neutro respecto a la adición es $\vec{0} = (0, 0)$, ya que para cualquier vector $\vec{v} = (x, y)$ se tiene:

$$\left.\begin{array}{l}(x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y)\\ (0, 0) + (x, y) = (0 + x, 0 + y) = (x, y)\end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$$

4.3. *Todo vector de $\mathbb{R}^2$ tiene un opuesto.*

El opuesto del vector $\vec{v} = (x, y)$ es $-\vec{v} = (-x, -y)$, ya que

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = (x, y) + (-x, -y) = (0, 0) = \vec{0}$$
$$-\vec{v} + \vec{v} = (-x, -y) + (x, y) = (0, 0) = \vec{0}$$

$$[(x, y) + (x', y')] + (x'', y'')$$
$$\downarrow \text{①}$$
$$(x + x', y + y') + (x'', y'')$$
$$\downarrow \text{②}$$
$$((x + x') + x'', (y + y') + y'')$$
$$\downarrow \text{③}$$
$$(x + (x' + x''), y + (y' + y''))$$
$$\downarrow \text{④}$$
$$(x, y) + (x' + x'', y' + y'')$$
$$\downarrow \text{⑤}$$
$$(x, y) + [(x', y') + (x'', y'')]$$

10. Dados los vectores (1, 2) y (3, 5), comprueba con ellos que se verifica la propiedad conmutativa de la suma.

11. Sean los vectores (1, 2), (−1, 0) y (3, 5). Comprueba que se verifica con ellos la asociatividad de la suma.

12. Halla un vector (x, y) tal que se cumpla $(x, y) + (2, -1) = (2, -1)$.

El opuesto de $\vec{v}$ es (x, y); se escribe $-(x, y) = -\vec{v}$; se tiene:

$$-(x, y) = (-x, -y)$$

Ejemplos:

- El vector opuesto de $(3, 2)$ es $(-3, -2)$.
- $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ es el vector opuesto de $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$
- $-\left(\frac{1}{3}, -2\right) = \left(-\frac{1}{3}, 2\right)$
- $-(-(1, 2)) = -(-1, -2) = (1, 2)$, esto expresa que el opuesto del opuesto de un vector es el mismo vector, es decir: $-(-\vec{v}) = \vec{v}$

4.4. *Propiedad conmutativa.*

La adición $\mathbb{R}^2$ verifica la propiedad conmutativa, es decir, para todo par de vectores (x, y), (x', y') se tiene:

$$(x, y) + (x', y') = (x', y') + (x, y)$$

Ejemplo:

- $(3, -1) + (2, 0) = (5, -1) = (2, 0) + (3, -1)$.

Por cumplir la adición de vectores las cuatro propiedades anteriores, resulta que

$$(\mathbb{R}^2, +) \textit{ es un grupo conmutativo.}$$

4.5. Siendo $(\mathbb{R}^2, +)$ un grupo, se puede definir la sustracción. Si (x, y), (x', y') son dos vectores de $\mathbb{R}^2$, entonces

$$(x, y) - (x', y') = (x, y) + (-(x', y'))$$

Luego,

$$\mathbf{(x, y) - (x', y') = (x - x', y - y')}$$

Ejemplos:

- $(3, 2) - (1, -1) = (3 - 1, 2 - (-1)) = (2, 3)$
- $\left(\frac{1}{3}, 0\right) - \left(\frac{2}{3}, 1\right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}, 0 - 1\right) = \left(-\frac{1}{3}, -1\right)$

13. Halla un vector (x, y) tal que

$$(x, y) + (-1, 2) = (0, 0).$$

14. Halla el opuesto del opuesto de $(2, 1)$.

15. Demuestra la propiedad conmutativa de la adición de vectores indicando cada uno de los pasos.

16. Si $\vec{x} = (2, 1)$, $\vec{y} = (-1, 0)$ y $\vec{z} = (3, -1)$, calcula:

a) $(\vec{x} + \vec{y}) - \vec{z}$

b) $(\vec{x} - \vec{y}) - \vec{z}$

c) $(\vec{x} - \vec{y}) + \vec{z}$

d) $\vec{x} - (\vec{y} - \vec{z})$

e) $\vec{x} - (\vec{y} + \vec{z})$

17. ¿Cuánto vale $-(-(x, y))$? Razona tu contestación.

5 Multiplicación de vectores por números reales

5.1. Sea $\vec{x} = (2,5)$ un vector de $\mathbb{R}^2$. Si se trata de hallar $\vec{y} = \vec{x} + \vec{x} + \vec{x}$, se puede proceder así:

$$\vec{y} = \vec{x} + \vec{x} + \vec{x} = (2,5) + (2,5) + (2,5) = (2 + 2 + 2, 5 + 5 + 5) = \\ = (3 \cdot 2, 3 \cdot 5) = (6, 15)$$

La suma de tres vectores iguales se obtiene multiplicando cada componente por 3. Se escribirá $\vec{y} = 3\vec{x}$.

Si $\vec{x} = (a, b)$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $n(a, b) = (na, nb) = n\vec{x}$.

Ejemplos:

- $5\vec{x} = \vec{x} + \vec{x} + \vec{x} + \vec{x} + \vec{x} = 5(a, b) = (5a, 5b)$
- $7 \cdot (3, 2) = (7 \cdot 3, 7 \cdot 2) = (21, 14)$

5.2. La consideración del apartado anterior nos permite generalizar y dar una definición del *producto de un vector por un número real.*

Sea (x, y) un vector de $\mathbb{R}^2$ y α un número real. *Se llama producto de* (x, y) *por* α, *y se designa por* $\alpha(x, y)$ *o bien* $\alpha \cdot (x, y)$, *al vector dado por* $(\alpha x, \alpha y)$.

Ejemplos:

- Si $\alpha = -2$ y $\vec{x} = (1, 5)$, entonces $\alpha\vec{x} = (-2)(1, 5) = (-2, -10)$
- $(-3)(-2, -1) = \big((-3)(-2), (-3)(-1)\big) = (6, 3)$.

El producto de un vector por un número real es una aplicación de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(\alpha, (x, y)) \longrightarrow (\alpha x, \alpha y)$$

es decir, es una operación externa sobre $\mathbb{R}^2$, con $\mathbb{R}$ como dominio de operadores. (Ver apartado **8.**, tema 1.)

$\mathbb{R}$ se llama también *cuerpo de escalares*, y la operación definida, *producto de un vector por un escalar.*

18. Haz las siguientes multiplicaciones de escalares por vectores:

a) $3(2, 1)$

b) $(-2)(1, -5)$

c) $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{7}\right)$

d) $2\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

19. Halla α de modo que se verifique

a) $\alpha(3, 2) = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$

b) $\alpha(\sqrt{2}, 1) = (2, \sqrt{2})$

6 Propiedades del producto de un vector por un número real

El producto de vectores por números reales verifica las siguientes propiedades:

Distributiva respecto de los vectores.

6.1. $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\ \vec{x} + \alpha\ \vec{y}$.

Sean $\vec{x} = (a, b)$. $\vec{y} = (a', b')$; entonces se tienen las siguientes igualdades:

$$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha[(a, b) + (a', b')] \overset{①}{=} \alpha(a + a', b + b') =$$

$$\overset{②}{=} (\alpha(a + a'), \alpha(b + b')) \overset{③}{=} (\alpha a + \alpha a', \alpha b + \alpha b') =$$

$$\overset{④}{=} (\alpha a, \alpha b) + (\alpha a', \alpha b') \overset{⑤}{=} \alpha(a, b) + \alpha(a', b') = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$$

En ① y ④ se aplica la definición de suma de vectores, en ② y ⑤ la definición de producto de un vector por un número, y en ③ la propiedad distributiva de los números reales.

Esta primera propiedad expresa la distributividad del producto de un número por la suma de vectores.

6.2. $(\alpha + \beta)\,\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$.

En efecto, sea $(a, b) = \vec{x}$ un vector de $\mathbb{R}^2$; entonces:

$$(\alpha + \beta)\vec{x} = (\alpha + \beta)(a, b) \overset{①}{=} ((\alpha + \beta)a, (\alpha + \beta)b) \overset{②}{=}$$

$$= (\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b) \overset{③}{=} (\alpha a, \alpha b) + (\beta a, \beta b) \overset{④}{=}$$

$$= \alpha(a, b) + \beta(a, b) = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$$

donde en ① y ④ se aplica la definición de producto de vectores por números reales; en ② la propiedad distributiva de números reales; y en ③ la definición de suma de vectores.

Esta segunda propiedad expresa la distributividad del producto de un vector por la suma de escalares.

Ejemplo:

- $(3 + 2)(1, 3) = 5(1, 3) = (5, 15)$
  $(3 + 2)(1, 3) = 3(1, 3) + 2(1, 3) = (3, 9) + (2, 6) = (5, 15)$, se verifica que $(3 + 2)(1, 3) = 3(1, 3) + 2(1, 3)$.

20. Si $\vec{x} = (3, 2)$ e $\vec{y} = (1, -1)$, calcula:

a) $2\vec{x} + 2\vec{y}$

b) $2(\vec{x} + \vec{y})$

c) ¿Se obtiene el mismo resultado en a) que en b)?

21. Si $\vec{x} = (2, 1)$, $\alpha = 2$ y $\beta = -5$, calcula $(\alpha + \beta)\vec{x}$ y comprueba que es igual a $\alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$.

22. Si $\vec{x} = (x_1, x_2)$, calcula:

a) $-2\vec{x}$

b) $-5\vec{x}$

23. Demuestra que

si $\vec{x} = (x_1, x_2)$, entonces $0\vec{x} = \vec{0}$.

Indicación: Multiplica $0 \cdot (x_1, x_2)$.

24. Demuestra que $(\alpha - \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} - \beta\vec{x}$.
Indicación:

$$(\alpha - \beta)\vec{x} = (\alpha - \beta)(x_1, x_2) =$$
$$= ((\alpha - \beta)x_1, (\alpha - \beta)x_2)$$

6.3. $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$.

En efecto, si $\vec{x} = (a, b)$, se verifica:

$$\alpha(\beta\vec{x}) = \alpha(\beta(a, b)) \overset{①}{=} \alpha(\beta a, \beta b) \overset{②}{=} (\alpha(\beta a), \alpha(\beta b)) \overset{③}{=}$$

$$= ((\alpha\beta)a, (\alpha\beta)b) \overset{④}{=} (\alpha\beta)(a, b) = (\alpha\beta)\vec{x}$$

donde en ①, ② y ④ se aplica el producto de un vector por un número real y en ③ la propiedad asociativa de números reales.

6.4. $1\vec{x} = \vec{x}$, ya que si $\vec{x} = (a, b)$, entonces

$$1 \cdot (a, b) = (1 \cdot a, 1 \cdot b) = (a, b) = \vec{x}$$

25. ¿Se cumple la siguiente igualdad?

$$2 \cdot (3 \cdot (1, -1)) = (2 \cdot 3) \cdot (1, -1)$$

7 El espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot\,\mathbb{R})$

7.1. Se ha visto que:

a) el par $(\mathbb{R}^2, +)$ es un grupo abeliano,

b) el producto de un vector de $\mathbb{R}^2$ por un número real verifica las propiedades estudiadas en **6.1.**, **6.2.**, **6.3.** y **6.4.**

Por verificarse las condiciones a) y b) anteriores, se dice que la terna $(\mathbb{R}^2, +, \cdot\,\mathbb{R})$ es *un espacio vectorial.*

7.2. *En general:*

Se llama espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales a la terna $(V, +, \cdot\,\mathbb{R})$ donde:

a) V es un conjunto.

b) $+$ es una aplicación $(\vec{x}, \vec{y}) \longrightarrow \vec{x} + \vec{y}$ de $V \times V$ en V, es decir una operación interna en V que verifica las propiedades siguientes:

V_1: Para todo $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ se tiene

$$\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} \text{ (Propiedad asociativa)}$$

V_2: Existe un elemento $\vec{0} \in V$ tal que para todo $\vec{x} \in V$ se tiene $\vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$ (Elemento neutro)

V_3: Para todo elemento $\vec{x} \in V$ existe un elemento $\vec{x}' \in V$ tal que $\vec{x} + \vec{x}' = \vec{0}$ (Elemento simétrico)

V_4: Para todo $\vec{x}, \vec{y}$ se tiene que

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} \text{ (Propiedad conmutativa)}$$

Por cumplir las propiedades anteriores, el par $(V, +)$ es un grupo abeliano.

c) $\cdot$ es una ley externa sobre V que verifica los axiomas siguientes:

V_5: Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y para todo $\vec{x} \in V$ se tiene

$$(a + b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{y}$$

V_6: Para todo $a \in \mathbb{R}$ y para todo $\vec{x}, \vec{y} \in V$ se tiene

$$a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}$$

V_7: Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y para todo $\vec{x} \in V$ se tiene

$$a(b\vec{x}) = (ab)\vec{x}$$

V_8: Para todo $\vec{x} \in V$ se tiene

$$1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

7.3. Los elementos de V se llaman *vectores;* los elementos de $\mathbb{R}$ se llaman *escalares* siempre y cuando operen sobre V.

La operación $(\vec{x}, \vec{y}) \longrightarrow \vec{x} + \vec{y}$ se llama *adición de vectores*, y $\vec{x} + \vec{y}$, *suma* de los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

La operación externa $(a, \vec{x}) \longrightarrow a\vec{x}$ se llama *multiplicación de vectores por escalares*, y el vector $a\vec{x}$, *producto* del vector $\vec{x}$ por el escalar a.

26. Sea $\mathbb{C}$ el conjunto de los números complejos. Se consideran las operaciones

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$$
$$k(a + bi) = (ka) + (kb)i, \quad k \in \mathbb{R}$$

Demuestra que con estas operaciones $(\mathbb{C}, +, \cdot\, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial real.

8 Dependencia e independencia lineal

8.1. *Dados dos vectores $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, el vector $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ se dice que es una combinación lineal de los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$.*

Si entre los vectores $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^2$ se verifica. para ciertos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, que $\vec{z} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$, se dice que $\vec{z}$ depende linealmente de $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

Ejemplo:

- El vector $\vec{z} = (3, 16)$ depende linealmente de $\vec{x} = (3, 5)$ e $\vec{y} = (-1, 2)$, ya que $(3, 16) = 2(3, 5) + 3(-1, 2)$, es decir: $\vec{z} = 2\vec{x} + 3\vec{y}$.

8.2. *Dos vectores, $\vec{x} = (a, b)$, $\vec{y} = (a', b')$, de $\mathbb{R}^2$ se dice que son linealmente dependientes, o que es un conjunto ligado, si existen dos escalares α y β, siendo al menos uno de ellos no nulo, tales que $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = \vec{0}$.*

Ejemplos:

- Dos vectores, uno de los cuales es el vector cero, son linealmente dependientes. En efecto, se verifica: $0\vec{x} + 1 \cdot \vec{0} = \vec{0} \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \{\vec{x}, \vec{0}\}$ es un conjunto ligado, ya que $1 \neq 0$.

- Los vectores $\vec{x} = (3, 3)$, $\vec{y} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ son linealmente dependientes, pues $\frac{1}{3}(3, 3) - 2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (0, 0)$, es decir:

$$\frac{1}{3}\vec{x} + (-2)\vec{y} = \vec{0}$$

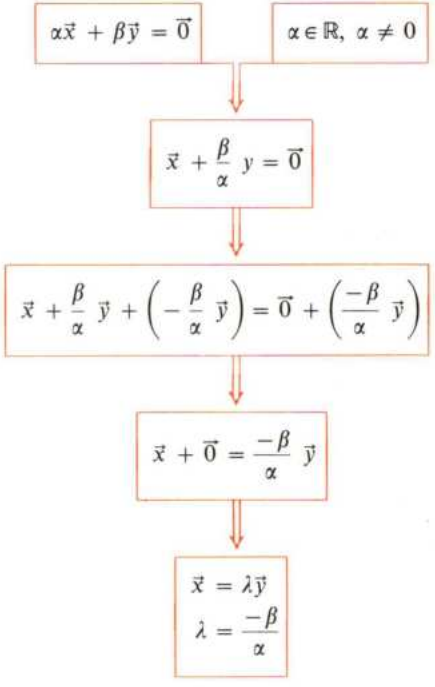
8.3. Los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son linealmente dependientes si y sólo si se verifica $\vec{x} = \lambda\vec{y}, \lambda \in \mathbb{R}$.

En efecto: si $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son linealmente dependientes, entonces se tiene $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = \vec{0}$, siendo α o β distintos de cero. Supongamos que $\alpha \neq 0$, entonces resulta: $\vec{x} + \frac{\beta}{\alpha}\vec{y} = 0$; sumando $\frac{-\beta}{\alpha}\vec{y}$ a los dos miembros de la última igualdad, se tiene:

$$\vec{x} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{y} \Longrightarrow \vec{x} = \lambda\vec{y} \quad \text{con} \quad \lambda = \frac{-\beta}{\alpha}$$

Recíprocamente, si $\vec{x} = \lambda\vec{y}$ se tiene $1 \cdot \vec{x} + (-\lambda)\vec{y} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{x}$ e $\vec{y}$ son linealmente dependientes.

La demostración de la primera parte del teorema se puede seguir también en el esquema del margen.



8.4. Sean los vectores $\vec{x} = (a, b)$ e $\vec{y} = (c, d)$.

Si $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son linealmente dependientes, se ha visto en **8.3.** que $\vec{x} = \lambda\vec{y}$, es decir, $(a, b) = \lambda(c, d) = (\lambda c, \lambda d)$; de esta igualdad de vectores se obtiene la siguiente igualdad entre sus componentes: $\begin{cases} a = \lambda c \\ b = \lambda d \end{cases}$ y suponiendo c y d no nulos, se tiene: $\lambda = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Este resultado se puede expresar diciendo:

Si dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^2$ son linealmente dependientes, sus componentes son proporcionales.

Recíprocamente: Si en los vectores $\vec{x} = (a, b)$ e $\vec{y} = (c, d)$ se verifica $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son linealmente dependientes, pues si $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = k$, se tiene: $\begin{cases} a = ck \\ b = dk \end{cases}$

Luego $\vec{x} = (a, b) = (ck, dk) = k(c, d) = k\vec{y}$, lo que nos dice que $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son linealmente dependientes.

Ejemplos:

- Los vectores $\vec{x} = (3 - 5)$ e $\vec{y} = (-12, 20)$ son linealmente dependientes, ya que $\dfrac{3}{-12} = \dfrac{-5}{20}$.
- Veamos si los vectores $(6, -3)$ y $\left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$ son linealmente dependientes. De $(6, -3) = k\left(-1, \dfrac{1}{2}\right) = \left(-k, \dfrac{k}{2}\right)$ se tiene $k = -6$, luego los vectores dados son linealmente dependientes.
- Los vectores $(4, 3)$ y $(1, 2)$ *no* son linealmente dependientes, pues de $(4, 3) = k(1, 2) = (k, 2k)$ se tiene $\begin{cases} 4 = k \\ 3 = 2k \end{cases}$

  Como no hay ningún valor de k que verifique las dos igualdades, los vectores dados no son linealmente dependientes.

8.5. Se dice que los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son linealmente independientes, o que es un conjunto libre de vectores, cuando no son linealmente dependientes, es decir, la relación $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = \vec{0}$ implica $\alpha = 0$ y $\beta = 0$.

Ejemplos:

- Los vectores $\vec{u} = (2, 0)$ y $\vec{v}(0, 3)$ son linealmente independientes, pues de $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ resulta:

$$\alpha(2, 0) + \beta(0, 3) = (2\alpha, 0) + (0, 3\beta) = (2\alpha, 3\beta) = (0, 0) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \alpha = 0 \quad \text{y} \quad \beta = 0$$

- Los vectores $(4, 3)$ y $(1, 2)$ del ejemplo de **8.4.** son linealmente independientes, pues no son linealmente dependientes.

8.6. Sean $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots, \vec{x}_n$ un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$; se llama *combinación lineal* de dichos vectores a toda expresión de la forma $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \alpha_3\vec{x}_3 + \cdots + \alpha_n\vec{x}_n$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

El vector $\vec{x} = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \alpha_3\vec{x}_3 + \cdots + \alpha_n\vec{x}_n$ se dice que depende linealmente de los vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots, \vec{x}_n$.

Ejemplos:

- El vector $\vec{x} = (1, -1)$ depende linealmente de los vectores $\vec{x}_1 = (1, 0), \vec{x}_2 = (2, 4), \vec{x}_3 = (6, 9)$, ya que $\vec{x} = 2\vec{x}_1 + \dfrac{1}{2}\vec{x}_2 - \dfrac{1}{3}\vec{x}_3$ (Compruébelo el alumno.)

27. Comprueba que los vectores $(4, 6)$ y $(-12, -18)$ son linealmente dependientes.

28. Demuestra que si $\vec{x}$ depende linealmente de $\vec{y}$, entonces $\vec{y}$ depende linealmente de $\vec{x}$.

29. Los vectores $(1, -6)$ y $(4, -24)$, ¿son linealmente dependientes?

Indicación: Calcula λ en $(4, -24) = \lambda(1, -6)$

30. Comprueba que los vectores $(4, 0)$ y $(0, 1)$ son linealmente independientes.

31. Halla un vector que dependa linealmente de $\vec{x}_1 = (1, 1), \vec{x}_2 = (0, 1), \vec{x}_3 = (0, 0)$ y $\vec{x}_4 = (-1, 2)$

- Vamos a hallar un vector $\vec{x}$ que depende linealmente de los vectores $\vec{y} = (1, 2)$ y $\vec{z} = (3, 4)$. Se pueden obtener muchos vectores $\vec{x}$ en estas condiciones, uno de ellos es:

$$\vec{x} = 2\vec{y} + 3\vec{z} = 2(1, 2) + 3(3, 4) = (2, 4) + (9, 12) = (11, 16)$$

- El vector $\vec{0}$ depende linealmente de cualquier conjunto de vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots, \vec{x}_n$, puesto que

$$\vec{0} = 0\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + 0\vec{x}_3 + \cdots + 0\vec{x}_n$$

8.7. Un conjunto de vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots, \vec{x}_n$ se dice que es *linealmente dependiente*, o que es un *conjunto ligado, si existen escalares* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, *siendo al menos uno de ellos no nulo, tales que* $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \alpha_3\vec{x}_3 + \cdots + \alpha_n\vec{x}_n = \vec{0}$.

En caso contrario, el conjunto $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots, \vec{x}_n$ se dice que es un *conjunto libre* o linealmente independiente.

Por tanto, si $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ es un conjunto libre, la relación $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{x}_n = \vec{0}$, implica

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots \alpha_n = 0$$

Ejemplos:

- Si $\vec{x}_1 = (1, 2)$ y $\vec{x}_2 = (2, 4)$, entonces $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ es un conjunto ligado, ya que $\vec{x}_2 - 2\vec{x}_1 = \vec{0}$.

- Los vectores $\vec{x}_1 = (1, 2)$ y $\vec{x}_2 = (-1, 2)$ forman un conjunto $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ libre, ya que $a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 = \vec{0}$ implica $a_1 = a_2 = 0$.

  En efecto, $a_1(1, 2) + a_2(-1, 2) = \vec{0} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 - a_2 = 0 \\ 2a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_1 - a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

8.8. Se puede probar, de modo análogo a como se hizo en **8.3.**, que:

Los vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ son linealmente dependientes si y sólo si uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás.

Ejemplo:

- Los vectores $(2, 1)$, $(-1, 4)$, $(1, 6)$ y $(-1, 2)$ son linealmente dependientes pues $(-1, 2) = 2(2, 1) + 3(-1, 4) - 2(1, 6)$.

(Compruébelo el alumno.)

Es decir, uno de los vectores dados se puede expresar como combinación lineal de los otros.

32. ¿Es el conjunto de vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{0}, \vec{x}_3\}$ linealmente independiente?

Razona tu contestación.

33. Comprueba si son o no ligados los conjuntos de vectores:

a) $(1, 1), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

b) $(2, 3), (2, 1)$

9 Bases y coordenadas

9.1. Consideremos los vectores $\vec{v} = (2, 3)$ y $\vec{u} = (1, 2)$; como $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{2}$, $\vec{v}$ y $\vec{u}$ no son linealmente dependientes, luego son linealmente independientes.

Un vector cualquiera del espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot\, \mathbb{R})$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Así, si se trata de expresar el vector $\vec{x} = (-1, -4)$ como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{u}$, determinaremos α y β en la igualdad

$$\vec{x} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{u}; \quad (1, -4) = \alpha(2, 3) + \beta(1, 2)$$
$$(-1, -4) = (2\alpha, 3\alpha) + (\beta, 2\beta) = (2\alpha + \beta, 3\alpha + 2\beta)$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} -1 = 2\alpha + 1\beta \\ -4 = 3\alpha + 2\beta \end{cases}$$ se obtiene $\alpha = 2, \beta = -5$ con lo que $\vec{x} = 2\vec{v} - 5\vec{u}$

Si en lugar del vector $(-1, -4)$ consideramos un vector cualquiera (m, n), el sistema que resultaría sería:

$$\begin{cases} m = 2\alpha + \beta \\ n = 3\alpha + 2\beta \end{cases}$$ y como $\frac{2}{3} \neq \frac{1}{2}$, resulta que este sistema tendrá una única solución. (Ver tema 15, Matemática 1.º, Santillana.)

Resulta así que el conjunto formado por los vectores $\vec{v} = (2, 3)$ y $\vec{u} = (1, 2)$ verifica estas dos condiciones:

a) Son linealmente independientes.

b) Cualquier otro vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ se puede expresar como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{u}$, $\vec{x} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{u}$.

Por cumplir las dos condiciones anteriores se dice que el conjunto $\{\vec{v}, \vec{u}\}$ es *una base del espacio vectorial* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot\, \mathbb{R})$.

9.2. Los números α y β son únicos. En efecto, supongamos que respecto de la base $\{\vec{v}, \vec{u}\}$ el vector $\vec{x}$ se pudiera escribir de las dos formas siguientes:

$$\begin{cases} x = \alpha\vec{v} + \beta\vec{u} \\ x = \alpha_1\vec{v} + \beta_1\vec{u} \end{cases}$$ entonces $\alpha\vec{v} + \beta\vec{u} = \alpha_1\vec{v} + \beta_1\vec{u}$ o también $(\alpha - \alpha_1)\vec{v} + (\beta - \beta_1)\vec{u} = \vec{0}$, y como $\vec{v}$ y $\vec{u}$ son linealmente independientes, resulta $\begin{cases} \alpha - \alpha_1 = 0 \\ \beta - \beta_1 = 0 \end{cases}$ es decir, $\alpha = \alpha_1$ y $\beta = \beta_1$. Luego los números α y β son únicos.

Los números α y β reciben el nombre de coordinadas de $\vec{x}$ respecto de la base $\{\vec{v}, \vec{u}\}$.

9.3. Los vectores $\vec{u}_1 = (1, 0)$ y $\vec{u}_2 = (0, 1)$ son linealmente independientes, ya que $(1, 0) = k(0, 1)$ no se verifica para ningún valor de k.

Cualquier otro vector $\vec{x} = (m, n)$ se puede expresar como combinación lineal de $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$, pues

$$(m, n) = (m, 0) + (0, n) = m(1, 0) + n(0, 1),$$

es decir $\vec{x} = m\vec{u}_1 + n\vec{u}_2$.

Por tanto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es una base del espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot\, \mathbb{R})$ llamada la *base canónica.*

Se observa que, respecto a esta base, las *coordenadas* de un vector coinciden con sus componentes en tanto que elementos del producto cartesiano $\mathbb{R}^2$.

Las coordenadas α y β del vector $(7, 16)$ respecto a la base formada por los vectores $\vec{u}_1 = (1, 3)$ y $\vec{u}_2 = (1, 2)$ son

$$(7, 16) = \alpha(1, 3) + \beta(1, 2) \Longrightarrow \begin{cases} 7 = \alpha + \beta \\ 16 = 3\alpha + 2\beta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 5 \end{cases}$$

34. Comprueba que los vectores $(4, 1)$ y $(2, 3)$ son linealmente independientes.

35. ¿Cuáles son las coordenadas del vector $(3, 2)$ respecto de la base formada por los vectores $\vec{u}_1 = (1, 1)$ y $\vec{u}_2 = (-1, 0)$?

Indicación: Calcula α y β en

$$(3, 2) = \alpha(1, 1) + \beta(-1, 0)$$

36. Escribe dos vectores linealmente independientes y otros dos linealmente dependientes.

37. Calcula α y β de modo que se verifique:

$$\vec{w} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{u}, \quad \text{siendo}$$

$$\vec{v} = (-1, 0),\ \vec{u} = (0, -1) \text{ y } \vec{w} = (2, 2)$$

10 El espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot\, \mathbb{R})$

10.1. Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales. $\mathbb{R}^3$ designa el conjunto de todas las ternas de números reales.

$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$, es decir: $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Este conjunto $\mathbb{R}^3$ de todas las ternas posibles de números reales da lugar a una estructura de espacio vectorial si se define en dicho conjunto una adición y una multiplicación de elementos de $\mathbb{R}^3$ por números reales, de modo análogo a como se ha hecho en $\mathbb{R}^2$.

Los elementos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, como elemento del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, se llamarán también *vectores.*

10.2. Se dice que dos vectores (x, y, z) y (x', y', z') de $\mathbb{R}^3$ son iguales cuando lo son considerados como *ternas.*

$$\mathbf{(x, y, z) = (x', y', z') \Longleftrightarrow (x = x'),\ (y = y'),\ (z = z')}$$

Ejemplo:

- Si $(a, -2b, c) = (2a - 8, 6, 5)$ se tiene:

$$a = 8,\ b = -3,\ c = 5$$

38. Escribe tres vectores de $\mathbb{R}^3$.

39. Calcula (x, y, z) si es igual a $(1, -1, 0)$.

10.3. Sean (x, y, z) y (x', y', z') vectores de $\mathbb{R}^3$; se llama suma de dichos vectores, y se designa por $(x, y, z) + (x', y', z')$, al vector dado por $(x + x', y + y', z + z')$

$$\mathbf{(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')}$$

Se demuestra de una manera análoga a como se hizo en $\mathbb{R}^2$ que $(\mathbb{R}^3, +)$ es un grupo conmutativo.

El elemento neutro es el vector cero $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

El vector opuesto de (x, y, z) es $-(x, y, z) = (-x, -y, -z)$.

La sustracción viene definida del modo siguiente:

$$(x, y, z) - (x', y', z') = (x - x', y - y', z - z')$$

10.4. Sea (x, y, z) un vector de $\mathbb{R}^3$ y α un número real. El producto de (x, y, z) por $\alpha \in \mathbb{R}$ es por definición:

$$\mathbf{\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)}$$

Este producto tiene las cuatro propiedades estudiadas en el apartado **6**, y se demuestran de una manera análoga a como se hizo para $\mathbb{R}^2$.

Todo esto se resume diciendo que

$$(\mathbb{R}^3, +, \cdot\, \mathbb{R}) \text{ es un espacio vectorial real.}$$

10.5. La dependencia e independencia lineal se define del mismo modo que en $\mathbb{R}^2$, así como el concepto de base de $\mathbb{R}^3$.

Los vectores $(3, 2, 1)$ y $(6, 4, 2)$ son linealmente dependientes, pues $(6, 4, 2) - 2(3, 2, 1) = \vec{0}$, o también $(6, 4, 2) = 2(3, 2, 1)$.

Los vectores $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(7, 8, 9)$ son linealmente dependientes, puesto que

$$(7, 8, 9) - 2(4, 5, 6) + (1, 2, 3) = \vec{0} \Longleftrightarrow (7, 8, 9) = 2(4, 5, 6) - (1, 2, 3)$$

es decir, el vector $(7, 8, 9)$ se ha expresado como combinación lineal de los vectores $(4, 5, 6)$ y $(1, 2, 3)$.

Ejemplo:

- Los vectores $(2, 3, 5)$, $(1, 2, 4)$, $(-2, 2, 3)$ y $(10, 1, 4)$ son linealmente dependientes. Vamos a ver que el vector $(10, 1, 4)$ se puede expresar como combinación lineal de los restantes:

$$\begin{aligned}(10, 1, 4) &= a(2, 3, 5) + b(1, 2, 4) + c(-2, 2, 3) = \\ &= (2a, 3a, 5a) + (b, 2b, 4b) + (-2c, 2c, 3c) = \\ &= (2a + b - 2c,\ 3a + 2b + 2c,\ 5a + 4b + 3c)\end{aligned}$$

40. Sea el conjunto $\{1, 3, 5\}$. Escribe todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ que puedas. ¿Cuántos hay?

41. Demuestra que $(\mathbb{R}^3, +)$ es un grupo conmutativo.

42. Demuestra que el producto de vectores de $\mathbb{R}^3$ por números reales verifica las propiedades **6.2.**, **6.3.** y **6.4.** de espacio vectorial.

Por tanto, se tiene el sistema:

$$\begin{aligned} 10 &= 2a + b - 2c \\ 1 &= 3a + 2b + 2c \\ 4 &= 5a + 4b + 3c \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se obtiene $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$. El vector $(10, 1, 4)$ se expresa en función de los demás así:

$$(10, 1, 4) = 1\ (2, 3, 5) + 2(1, 2, 4) - 3(-2, 2, 3)$$

10.6. Los vectores $\vec{u}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{u}_3 = (0, 0, 1)$ son linealmente independientes.

En efecto:

$$a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \Longrightarrow (a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0) \Longrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

Por tanto:

$a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3 = \vec{0} \Longrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$ y los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ son linealmente independientes.

Cualquier otro vector de $\mathbb{R}^3$ se puede expresar como combinación lineal de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$. Sea $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, se tiene:

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) \\ &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) \\ &= x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 \end{aligned}$$

Por tanto, $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ llamada *base canónica.*

Respecto a esta base las coordenadas del vector y las componentes son iguales.

Ejemplo:

- Si $\vec{v} = (2, 4, 6)$, se tiene:

  $(2, 4, 6) = 2(1, 0, 0) + 4(0, 1, 0) + 6(0, 0, 1)$. Luego las coordenadas del vector $\vec{v} = (2, 4, 6)$ respecto de la base canónica son precisamente $(2, 4, 6)$, es decir, las componentes del vector.

43. Expresa respecto a la base canónica $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ el vector $(-2, -3, 5)$

11 El espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot\, \mathbb{R})$

11.1. Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \overset{n}{\ldots} \times \mathbb{R}$. Al igual que en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, se pueden definir en $\mathbb{R}^n$ una adición y una multiplicación de los elementos de $\mathbb{R}^n$ por números reales que confieran a $\mathbb{R}^n$ una estructura de espacio vectorial.

11.2. $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de las n-plas de números reales, es decir,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Igualdad de vectores en $\mathbb{R}^n$

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n) \Longleftrightarrow$$
$$(\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1), (\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_2), \ldots, (\mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n)$$

Se definen las dos operaciones siguientes en $\mathbb{R}^n$:

a) Suma de vectores en $\mathbb{R}^n$

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) + (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n) =$$
$$= (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n)$$

b) Producto de un vector por un número

$$\alpha(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) = (\alpha\mathbf{x}_1, \alpha\mathbf{x}_2, \ldots, \alpha\mathbf{x}_n)$$

Con estas operaciones $(\mathbb{R}^n, +, \cdot\, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial real.

11.3. La dependencia e independencia en $\mathbb{R}^n$, así como el concepto de base, se define igual que en $\mathbb{R}^2$.

Los vectores $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ donde

$$\vec{u}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ \vec{u}_2 = (0, 1, 0, \ldots, \vec{0}), \ldots, \vec{u}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

son linealmente independientes, ya que

$$a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \cdots + a_n\vec{u}_n = \vec{0} \Longleftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

Cualquier otro vector de $\mathbb{R}^n$ se puede expresar como combinación lineal de ellos. Se tiene, en efecto:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, 0, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, 0, \ldots, 0) + \cdots$$
$$+ (0, 0, 0, \ldots, x_n) = x_1(1, 0, 0, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots$$
$$+ x_n(0, 0, 0, \ldots, 1) = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \cdots + x_n\vec{u}_n$$

Por tanto, $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ llamada canónica.

Respecto a esta base, las coordenadas del vector y sus componentes son iguales.

Ejemplo:

- En $\mathbb{R}^5$, si $\vec{v} = (1, 3, -2, 4, 6)$, se tiene:

$$(1, 3, -2, 4, 6) = (1, 0, 0, 0, 0) + 3(0, 1, 0, 0, 0) - 2(0, 0, 1, 0, 0,) +$$
$$+ 4(0, 0, 0, 1, 0) + 6(0, 0, 0, 0, 1)$$

Las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base canónica son $(1, 3, -2, 4, 6)$.

44. Suma los vectores $(2, 3, 5, 6)$ y $(4, 5, -7, 2)$ de $\mathbb{R}^4$.

¿Cuál es el elemento neutro para la suma en $\mathbb{R}^4$?

45. Comprueba que una base de $\mathbb{R}^4$ es

$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$, donde

$\vec{u}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 0, 0)$,

$\vec{u}_3 = (0, 0, 1, 0)$ y $\vec{u}_4 = (0, 0, 0, 1)$

46. Escribe la base canónica del espacio vectorial $\mathbb{R}^5$.

Ejercicios y cuestiones

47. Si $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$ y $\vec{c} = (-3, 1)$, se pide:

a) $\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ b) $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ c) $\vec{a} - (\vec{b} - 2\vec{c})$

48. Calcula m y n de modo que se cumpla $(7, -7) = m(2, 1) + n(1, -3)$

49. Dados los vectores $\vec{a} = (-1, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, -1, 1)$ y $\vec{c} = (1, 1, -1)$ de $\mathbb{R}^3$, ¿son linealmente independientes?

¿Existe una única terna de números reales (α, β, γ) tales que $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = (-2, 1, 3)$?

50. Dados dos espacios vectoriales $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ sobre $\mathbb{R}$, se define en $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$ la adición de dos vectores (x_1, x_2), $(y_1, y_2) \in \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$ como: $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ y la multiplicación por números reales como $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$

Demuestra que $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$ con estas operaciones es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

51. Se considera el conjunto de números reales $F = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in Q\}$

En F se definen las operaciones $(x + y\sqrt{2}) + (x' + y'\sqrt{2}) = (x + x') + (y + y')\sqrt{2}$

$$\alpha(x + y\sqrt{2}) = (\alpha x + (\alpha y)\sqrt{2})$$

Demuestra que F con estas operaciones es un espacio vectorial.

52. Comprueba que $\{(1, 2), (2, 1)\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

53. Halla las coordenadas de $(3, 1)$ respecto de la base $\{(1, 2), (2, 1)\}$.

54. Comprueba si los vectores $(0, 1, 2), (2, 2, 4), (1, 5, 7)$ son o no linealmente dependientes en $\mathbb{R}^3$.

55. Halla las coordenadas del punto $(3, 2, 1)$ respecto de la base $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$.

56. Halla las coordenadas de $(3, 1, 2, -1)$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$:

$$B = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

57. Escribe la base canónica de $\mathbb{R}^5$ y expresa como combinación de ella el punto $(1, 1, 1, 1, 2)$.

58. Halla las coordenadas de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ en función de los de la base $B = \{(1, 1), (0, 1)\}$.

59. ¿Son linealmente independientes en $\mathbb{R}^4$ $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(2, 0, 2, 0)$? Razona la contestación.

Tema 3 EL PLANO VECTORIAL

En este tema se estudian los vectores libres del plano y su estructura de espacio vectorial.

Se hace un desarrollo gráfico pensando en su constante aplicación a la Física y a otras ciencias.

1 Vectores fijos

1.1. Sean A y B dos puntos del plano **P** (Fig. 1). Los puntos A y B determinan en el plano una recta: la recta r.

Los mismos puntos A y B determinan también el segmento $\overline{AB}$. *Un vector fijo es un segmento cuyos extremos se dan en un cierto orden.*

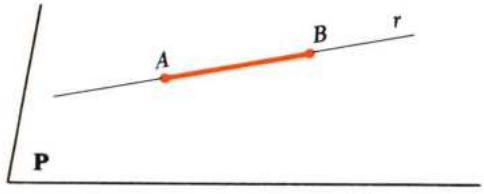
Dados los puntos A y B del plano, un vector fijo queda determinado siempre que se fije un orden entre ellos. El par (A, B) determina un vector fijo que representaremos por $\overrightarrow{AB}$, y el par (B, A) el vector fijo $\overrightarrow{BA}$.

Dado el vector fijo $\overrightarrow{AB}$, diremos que A es el *origen* del vector y B el *extremo*. Para distinguir gráficamente este último se acostumbra a ponerle una punta de flecha.

La figura 2 muestra la representación gráfica de los vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$.

Si los puntos A y B coinciden, diremos que determinan un vector fijo nulo, es decir, $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \overrightarrow{CC}, \ldots$ son vectores fijos nulos. *En los vectores fijos nulos, el origen coincide con el extremo.*

Designaremos por V al conjunto de los vectores fijos del plano.



(Fig. 1)

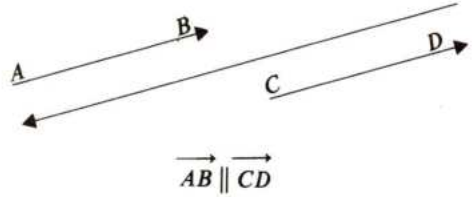
(Fig. 2)

1.2. *Dos vectores fijos no nulos, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, tienen la misma dirección cuando las rectas AB y CD son paralelas, es decir, no tienen ningún punto en común o coinciden.*

Para expresar que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen la misma dirección se escribe $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$. (Fig. 3.)

La relación *tener la misma dirección* entre vectores de V es una relación de equivalencia, por ser de equivalencia la relación de paralelismo de rectas.

Admitiremos que los vectores fijos nulos tienen la misma dirección.



(Fig. 3)

Ejercicios:

1. Dados cuatro puntos distintos del plano, ¿cuántos vectores determinan? Estudia los diferentes casos.

1.3. *Dos vectores, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, no nulos y no pertenecientes a la misma recta tienen el mismo sentido cuando tienen la misma dirección y los extremos B y D pertenecen al mismo semiplano de los dos que determina la recta AC.* (Fig. 4-a.)

Si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ están situados en la misma recta, se dice que tienen el mismo sentido cuando tienen el mismo sentido que otro vector $\overrightarrow{MN}$ no situado en dicha recta. (Fig. 4-b.)

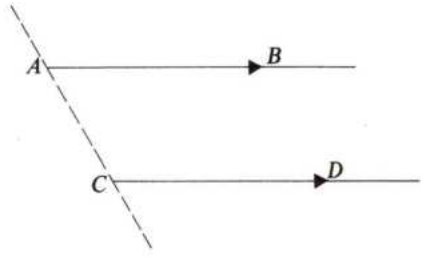
Para expresar que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen el mismo sentido escribiremos $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD}$.

La relación *tener el mismo sentido* entre vectores de V es evidentemente reflexiva, simétrica y transitiva.

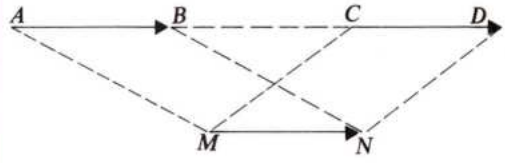
La relación *tener el mismo sentido* implica *tener la misma dirección*. El recíproco no es cierto.

Ejemplo:

- En la figura 5 los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{HG}$ tienen la misma dirección, pero no todos tienen el mismo sentido.



(Fig. 4-a)



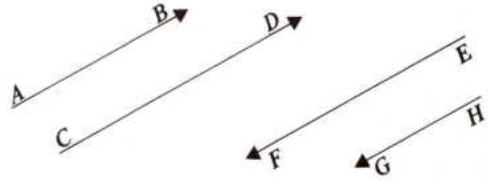
(Fig. 4-b)

1.4. *Se llama módulo de un vector fijo $\overrightarrow{AB}$, y se designa por $|\overrightarrow{AB}|$, a la longitud del segmento $\overline{AB}$.*

El vector nulo $\overrightarrow{AA}$ tiene por módulo, cero: $|\overrightarrow{AA}| = 0$.

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ tienen el mismo módulo, es decir, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$.

1.5. El módulo, la dirección y el sentido se llaman características del vector fijo. Estos tres elementos determinan completamente un vector fijo siempre que se conozca el origen.



(Fig. 5)

2 Equipolencia de vectores fijos

2.1. Sea V el conjunto de los vectores fijos del plano.

En este conjunto se define una relación, llamada de equipolencia, de la siguiente forma:
Dos vectores fijos no nulos, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, son equipolentes, y se escribe $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, cuando tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|,\ \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \text{ y } \overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD}$$

Por definición todos los vectores fijos nulos, $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \overrightarrow{CC}, \ldots$, se consideran equipolentes, es decir, $\overrightarrow{AA} \sim \overrightarrow{BB} \sim \overrightarrow{CC}, \ldots$.

2.2. *La equipolencia de vectores fijos es una relación de equivalencia en* V.

Esto es consecuencia de ser de equivalencia las relaciones *tener la misma dirección*, *tener el mismo módulo* y *tener el mismo sentido* en el conjunto V.

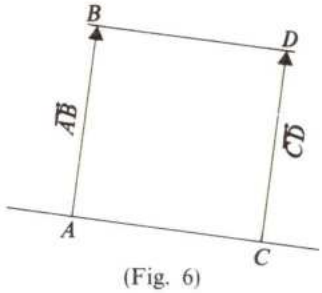
2.3. Si consideramos dos vectores fijos, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, no nulos y no pertenecientes a una misma recta y unimos los orígenes y los extremos, se forma un cuadrilátero. (Fig. 6.)

Si además los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes, entonces $ABDC$ es un paralelogramo.

Recíprocamente, dos vectores fijos, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, no nulos y no pertenecientes a una misma recta son equipolentes cuando la figura $ABDC$ es un paralelogramo. (Fig. 6.)

Se trata de ver que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

Los módulos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son iguales por ser lados opuestos de un paralelogramo; $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen la misma dirección, ya que las rectas AB y CD son paralelas. Finalmente $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen el mismo sentido, puesto que los puntos B y D quedan en el mismo semiplano respecto de la recta AC.



(Fig. 6)

2. Representa en el plano un vector fijo $\overrightarrow{AB}$. Dibuja tres vectores equipolentes al dado.

3. Dados dos puntos distintos del plano, A y B, dibuja:

a) El segmento $\overline{AB}$ y la recta AB.

b) El vector $\overrightarrow{AB}$ y el vector $\overrightarrow{BA}$.

¿Son equipolentes los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$? ¿Por qué?

4. Seis puntos, A, B, C, D, E y F, del plano son vértices de un hexágono regular. En el conjunto de vectores que determinan, halla los subconjuntos de vectores equipolentes entre sí.

3 El conjunto V^2 de los vectores libres del plano

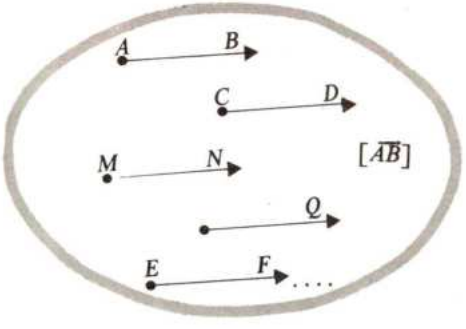
3.1. Sea $\overrightarrow{AB}$ un vector fijo del plano, es decir, un elemento de V. Siendo la equipolencia una relación de equivalencia, se puede considerar la clase determinada por $\overrightarrow{AB}$ y que se designará por $[\overrightarrow{AB}]$

$$[\overrightarrow{AB}] = \{\mathbf{XY} \mid \overrightarrow{\mathbf{XY}} \sim \overrightarrow{\mathbf{AB}}\}$$

Se llama *vector libre* a cada una de las clases de equivalencia. Dicho de otro modo: *Vector libre es el subconjunto de* V *formado por todos los vectores fijos equipolentes a uno dado.*

En adelante cada clase o vector libre determinado por $\overrightarrow{AB}$ se denotará por $[\overrightarrow{AB}]$, o bien por una letra con una flecha encima, $\vec{x} = [\overrightarrow{AB}]$.

El vector libre $[\overrightarrow{AB}]$ (Fig. 7) tiene por elementos los vectores fijos $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{EF}, \ldots$.



$[\overrightarrow{AB}] \subset \mathbf{V}$

(Fig. 7)

Nota: En la práctica, $\overrightarrow{AB}$ designa la clase o el representante indistintamente. Lo mismo sucede con la palabra *vector*, que abrevia la expresión *vector fijo* o *vector libre*. El contexto aclara si se trata de uno u otro.

3.2. Por ser los vectores clases de equivalencia, poseen las propiedades estudiadas en el apartado **4.** del tema 1.

a) Si $\overrightarrow{CD} \in [\overrightarrow{AB}]$, entonces $[\overrightarrow{CD}] = [\overrightarrow{AB}]$.

Al margen se demuestra que $[\overrightarrow{CD}] \subset \overrightarrow{AB}$. De una manera análoga se comprueba que $[\overrightarrow{AB}] \subset [\overrightarrow{CD}]$. De las dos inclusiones anteriores resulta: $[\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{CD}]$.

Aplicando la definición de vector libre y la inclusión de conjuntos, justifica cada uno de los pasos de la demostración.

También se puede probar de modo análogo a como se hizo en el tema 1 que

b) $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{CD}]$.

c) Dos vectores libres distintos, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, no tienen ningún vector fijo que sea representante de ambos.

3.3. Se llama *espacio de los vectores libres del plano* al conjunto cociente $V/\sim$, es decir, al conjunto de las clases de equivalencia. Este conjunto lo designaremos por $\mathbf{V}^2$.

El vector libre formado por todos los vectores fijos nulos es el *vector libre cero* o simplemente el *vector cero*. Un representante es $\overrightarrow{AA}$, y su clase $[\overrightarrow{AA}]$ se representará por $\vec{0}$.

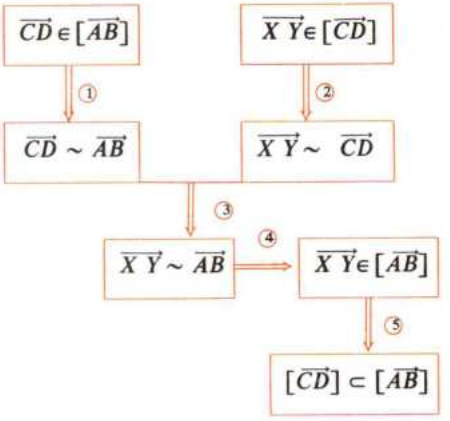
3.4. *Si $\vec{x}$ es un vector libre de $\mathbf{V}^2$ y O un punto arbitrario del plano, existe un único representante de $\vec{x}$ con origen en O.*

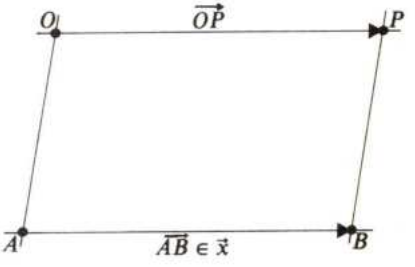
Sea $\overrightarrow{AB}$ un representante de $\vec{x}$.

Vamos a considerar dos casos:

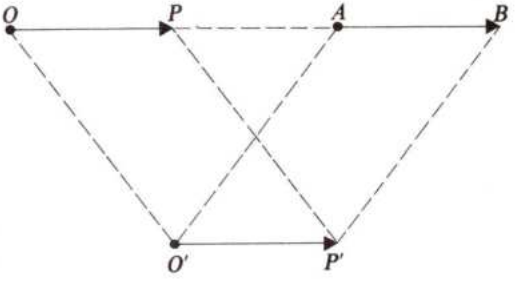
a) El punto O no pertenece a la recta AB (Fig. 8). Entonces por el punto O se traza la recta OP, $OP \parallel AB$; y por B se traza la recta BP, $BP \parallel AO$. El punto P de intersección de estas rectas es único. El vector $\overrightarrow{OP}$ es equipolente a $\overrightarrow{AB}$, ya que $ABPO$ es un paralelogramo.

b) El punto O pertenece a la recta AB (Fig. 9). En este caso se elige un punto O', exterior a la recta AB, y se construye el vector $\overrightarrow{O'P'} \sim \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{OP} \sim \overrightarrow{O'P'}$. Por la propiedad transitiva: $\overrightarrow{OP} \sim \overrightarrow{AB}$.





(Fig. 8)



(Fig. 9)

5. De las relaciones siguientes, indica cuáles son verdaderas y por qué.

a) $\overrightarrow{AB} \in [\overrightarrow{AB}]$; b) $\overrightarrow{AB} \subset [\overrightarrow{AB}]$

c) $\overrightarrow{AB} = [\overrightarrow{AB}]$; d) $\overrightarrow{AB} \sim [\overrightarrow{AB}]$

e) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$

4 Caracterización de un vector libre

4.1. Si los vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes, entonces los módulos $|\overrightarrow{AB}|$ y $|\overrightarrow{CD}|$ son iguales.

Lo mismo sucede con la dirección y el sentido como consecuencia de la definición de la relación de equipolencia.

Esto nos permite definir módulo, dirección y sentido de un vector libre:

Se llama módulo, dirección y sentido de un vector libre al módulo, la dirección y el sentido de cualquiera de sus representantes.

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores de $\mathbf{V}^2$, usaremos la notación

$|\vec{a}| = |\vec{b}|$ para indicar que tienen el mismo módulo,

$\vec{a} \,||\, \vec{b}$ si tienen la misma dirección, y

$\vec{a} \uparrow \vec{b}$ si tienen el mismo sentido.

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen sentido contrario, se escribe $\vec{a} \downarrow \vec{b}$.

Ejemplos:

- El vector libre $\vec{0}$ verifica que $|\vec{0}| = 0$ y carece de dirección.
- Los vectores libres $[\overrightarrow{AB}]$ y $[\overrightarrow{BA}]$ tienen la misma dirección.
- Los vectores libres $[\overrightarrow{AB}]$ y $[\overrightarrow{BA}]$ tienen distinto sentido.

4.2. El módulo, dirección y sentido se llaman características de un vector libre. Estos tres datos determinan un vector libre. Resumiendo lo anterior, podemos decir que si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son dos vectores fijos del plano, se verifica:

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1.^{\circ}) \ |[\overrightarrow{AB}]| = |[\overrightarrow{CD}]| \\ 2.^{\circ}) \ [\overrightarrow{AB}] \,||\, [\overrightarrow{CD}] \\ 3.^{\circ}) \ [\overrightarrow{AB}] \uparrow [\overrightarrow{CD}] \end{cases}$$

6. Dado el cuadrado $ABCD$, ¿cuántos vectores libres determinan los vértices?

7. Se considera en el plano **P** un punto fijo O. Se toman representantes de origen O de todos los vectores libres que tienen el mismo módulo.

¿Qué figura determinan los extremos de estos vectores?

8. Se considera en el plano **P** un punto fijo O. Se toman representantes de origen O de todos los vectores libres que tienen la misma dirección.

¿Qué figura determinan los extremos de estos vectores?

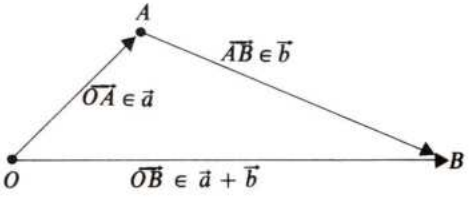
5 Adición de vectores libres

5.1. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores libres de $\mathbf{V}^2$; se llama suma de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, y se designa por $\vec{a} + \vec{b}$, al vector libre obtenido mediante la siguiente construcción:

Se toma un punto cualquiera O del plano. Sea $\overrightarrow{OA}$ un representante de $\vec{a}$ y $\overrightarrow{AB}$ un representante de $\vec{b}$; entonces

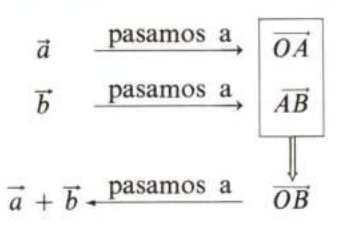
$$\vec{a} + \vec{b} = [\overrightarrow{OB}] \quad \text{(Fig. 10)}$$

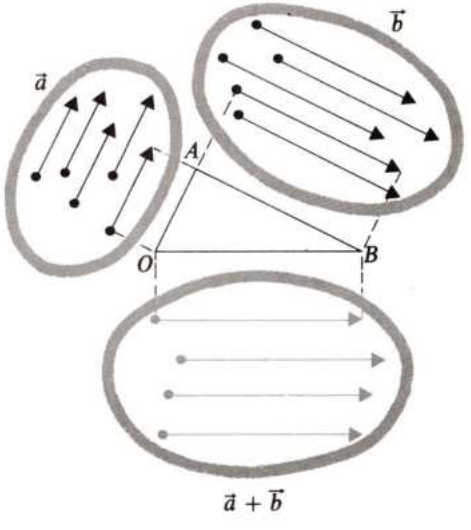
es decir, el vector fijo $\overrightarrow{OB}$ y todos sus equipolentes es el vector libre suma $\vec{a} + \vec{b}$.



(Fig. 10)

La figura 11 muestra un esquema de la adición de vectores libres por medio de sus representantes:





(Fig. 11)

5.2. La suma de los vectores libres $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se hace eligiendo un punto arbitrario O. ¿Qué sucederá si en vez del punto O elegimos otro punto O'? Vamos a ver que efectivamente:

La suma de vectores libres no depende del punto O elegido.

En efecto, sea O' otro punto cualquiera del plano; se trata de ver que el nuevo vector libre obtenido ahora es el mismo que el de antes (Fig. 12), o lo que es lo mismo, $\overrightarrow{OB} \sim \overrightarrow{O'B'}$.

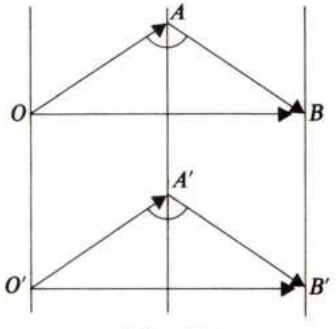
Vamos a demostrar el caso en el que $O' \notin \overrightarrow{OA}$ y los vectores libres $[\overrightarrow{OA}]$ y $[\overrightarrow{AB}]$ tienen distinta dirección (Fig. 12).

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OA} \sim \overrightarrow{O'A'} \Longrightarrow OAA'O' \text{ es un paralelogramo} \\ \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'} \Longrightarrow ABB'A' \text{ es un paralelogramo} \end{array}\right\} \text{ Por tanto,}$$

$OBB'O'$ es un paralelogramo, ya que los segmentos $\overline{OO'}$ y $\overline{BB'}$ son iguales y paralelos, por serlo ambos al segmento $\overline{AA'}$. De aquí se sigue que

$$\overrightarrow{OB} \sim \overrightarrow{O'B'} \Longleftrightarrow [\overrightarrow{OB}] = [\overrightarrow{O'B'}]$$

En consecuencia, dados dos vectores libres, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, su suma $\vec{a} + \vec{b}$ es un vector libre único, luego la adición es una operación interna en $\mathbf{V}^2$.



(Fig. 12)

6 Propiedades de la adición

La adición de vectores libres del plano cumple las siguientes propiedades:

6.1. *Propiedad asociativa.*

Para todo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{V}^2$ se verifica:

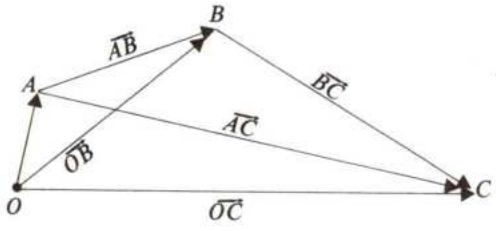
$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

Sean $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ representantes de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ respectivamente. Se tiene entonces, (Fig. 13), que:

$$\vec{a} + \vec{b} = [\overrightarrow{OB}],\ \vec{b} + \vec{c} = [\overrightarrow{AC}],$$

luego

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=[\overrightarrow{OA}]+[\overrightarrow{AC}]=[\overrightarrow{OC}] \\ (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=[\overrightarrow{OB}]+[\overrightarrow{BC}]=[\overrightarrow{OC}] \end{array}\right\} \Longrightarrow (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$



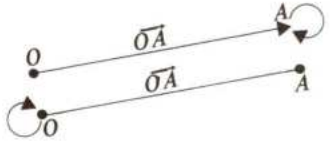
(Fig. 13)

6.2. *Elemento neutro.*

El elemento neutro es el vector cero: $\vec{0}$. En efecto, para todo $\vec{a} \in \mathbf{V}^2$ se tiene (Fig. 14)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} + \vec{0} = [\overrightarrow{OA}] + [\overrightarrow{AA}] = [\overrightarrow{OA}] \\ \vec{0} + \vec{a} = [\overrightarrow{OO}] + [\overrightarrow{OA}] = [\overrightarrow{OA}] \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

Siendo $\overrightarrow{OA}$ un representante de $\vec{a}$ y $\overrightarrow{OO}$ de $\vec{0}$.



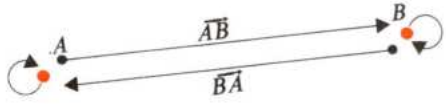
(Fig. 14)

6.3. *Elemento opuesto.*

El vector libre $\vec{a}$ *de representante* $\overrightarrow{AB}$ *tiene por vector opuesto el vector* $[\overrightarrow{BA}]$. En efecto, (Fig. 15),

$$[\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BA}] = [\overrightarrow{AA}] = \vec{0} \text{ y } [\overrightarrow{BA}] + [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{BB}] = \vec{0}$$

El vector libre opuesto de $\vec{a}$ se indicará por $-\vec{a}$.

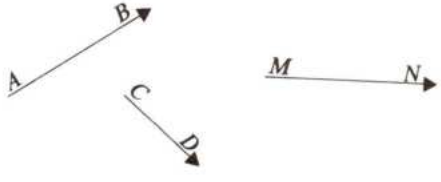


(Fig. 15)

6.4. *Propiedad conmutativa.*

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores libres del plano $\mathbf{V}^2$, se verifica $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

9. Dados los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$, cuyos representantes son $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{MN}$, de la figura 16, halla su suma.



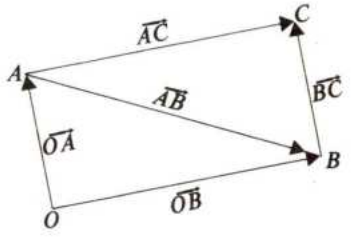
(Fig. 16)

Sean $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{BC}$ dos representantes de $\vec{a}$, y $\overrightarrow{AB}$ un representante de $\vec{b}$ (Fig. 17). Se tiene:

$$\vec{a} + \vec{b} = [\overrightarrow{OA}] + [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{OB}]$$

$$\vec{b} + \vec{a} = [\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BC}] = [\overrightarrow{AC}]$$

Como $OACB$ es un paralelogramo por ser $\overrightarrow{OA} \sim \overrightarrow{BC}$, resulta: $\overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{OB}$, luego $[\overrightarrow{OB}] = [\overrightarrow{AC}]$, es decir: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.



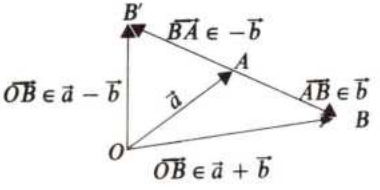
(Fig. 17)

6.5. Por todo lo anterior, *el conjunto* $\mathbf{V}^2$ *de los vectores libres del plano con la operación adición tiene estructura de grupo conmutativo*, es decir, *el par* $(\mathbf{V}^2, +)$ *es un grupo conmutativo o abeliano, llamado también grupo aditivo de los vectores libres del plano.*

6.6. Siendo $(\mathbf{V}^2, +)$ un grupo, se puede definir la operación inversa de la adición, que es la sustracción.

Se llama *vector diferencia* de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ al vector suma de $\vec{a}$ con el opuesto de $\vec{b}$.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad \text{(Fig. 18)}$$



(Fig. 18)

7 Producto de un vector libre por un número real

7.1. Sea $\vec{a}$ un vector libre de representante $\overrightarrow{AB}$.

En la figura 19 se han dibujado los representantes de

$$\vec{a},\ \vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a},\ \vec{a} + \vec{a} + \vec{a} = 3\vec{a}, \ldots$$

Si n es un número natural, con $n > 1$, se define el vector libre $n\vec{a}$ así:

$$n\vec{a} = \vec{a} + \vec{a} + \overset{n}{\ldots} + \vec{a}$$

El vector libre $2\vec{a} = \vec{a} + \vec{a}$ (Fig. 19) tiene como

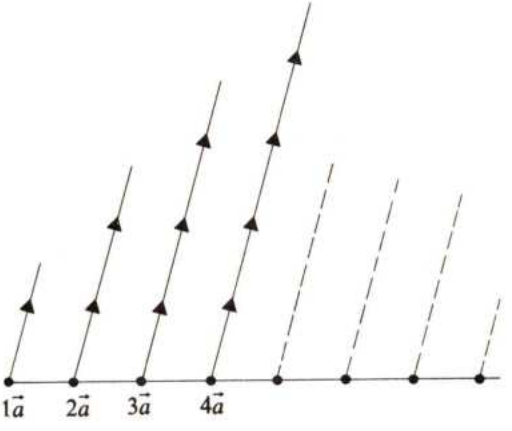
– módulo, el doble de módulo de $\vec{a}$: $|2\vec{a}| = 2|\vec{a}|$

– dirección, la misma que la de $\vec{a}$: $2\vec{a} \parallel \vec{a}$

– sentido, el mismo que $\vec{a}$: $2\vec{a} \uparrow \vec{a}$.

En general, el vector $n\vec{a}$ verificará:

1.º) $|n\vec{a}| = n|\vec{a}|$; 2.º) $n\vec{a} \parallel \vec{a}$; 3.º) $n\vec{a} \uparrow \vec{a}$.



(Fig. 19)

7.2. En la figura 20 se han dibujado representantes de los vectores libres $\vec{a}$ y $-\vec{a}$, $2\vec{a}$ y $2(-\vec{a})$.

Parece natural escribir

$$(-2)\vec{a} = 2(-\vec{a}) = -2\vec{a}$$

Y en general, si $n > 1$,

$$(-n)\vec{a} = n(-\vec{a}) = -n\vec{a}$$

El vector libre $(-2)\vec{a} = -\vec{a} - \vec{a}$ (Fig. 20) tiene como

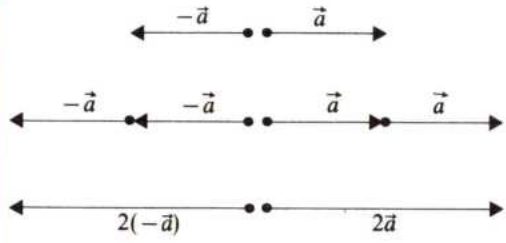
– módulo, el doble del módulo de $\vec{a}$: $|(-2)\vec{a}| = |-2|\,|\vec{a}|$

– dirección, la misma que la de $\vec{a}$: $(-2)\vec{a} \parallel \vec{a}$

– sentido, el opuesto al de $\vec{a}$: $(-2)\vec{a} \downarrow \vec{a}$.

En general, el vector $(-n)\vec{a}$ verificará:

1.º) $|(-n)\vec{a}| = |(-n)|\,|\vec{a}|$; 2.º) $(-n)\vec{a} \parallel \vec{a}$; 3.º) $(-n)\vec{a} \downarrow \vec{a}$.



(Fig. 20)

7.3. Generalizando, se define el producto de un vector libre por un número real del modo siguiente:

Se llama producto de $\vec{a}$ por k, y se designa por $k \cdot \vec{a}$, o bien $k\vec{a}$, al vector libre determinado por las siguientes condiciones:

a) módulo: $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$

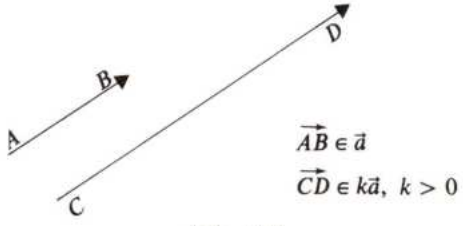
b) dirección: $k\vec{a} \parallel \vec{a}$

c) sentido: $k\vec{a} \uparrow \vec{a}$ si $k > 0$ (Fig. 21)

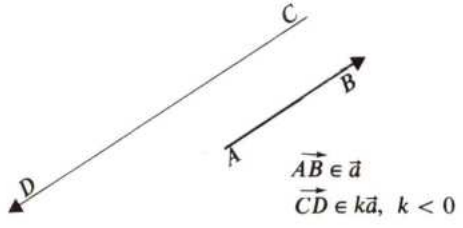
$k\vec{a} \downarrow \vec{a}$ si $k < 0$ (Fig. 22)

El vector $k\vec{a}$ es único, ya que todo vector libre queda caracterizado unívocamente por el módulo, dirección y sentido.

Por tanto, el producto de un vector por un número real es una operación externa en $\mathbf{V}^2$ con $\mathbb{R}$ como cuerpo de escalares.



(Fig. 21)



(Fig. 22)

8 Propiedades del producto por escalares

8.1. El producto de un vector libre por un número real verifica las cuatro propiedades siguientes:

a) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

b) $(k + h)\vec{a} = k\vec{a} + h\vec{a}$

c) $(kh)\vec{a} = k(h\vec{a})$

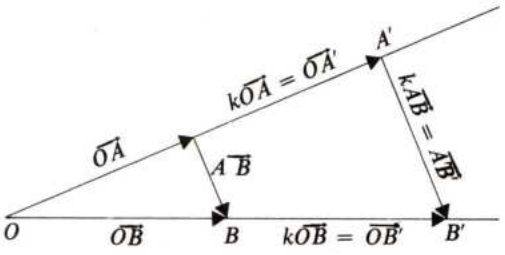
d) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

8.2. Demostremos la propiedad a) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

Consideremos dos casos según que $k > 0$ o $k < 0$, ya que si $k = 0$, es inmediata la igualdad.

1.º) $k > 0$. (Fig. 23.)

Sean $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{OB}$ representantes de los vectores libres $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} + \vec{b}$ respectivamente. Si se multiplican por k los vectores $\vec{a}$ y $\vec{a} + \vec{b}$, se tienen $k\vec{a}$ y $k(\vec{a} + \vec{b})$, cuyos representantes correspondientes son $\overrightarrow{OA'}$ y $\overrightarrow{OB'}$. Los triángulos OAB y $OA'B'$ son semejantes por tener dos lados proporcionales y el ángulo comprendido igual, luego $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

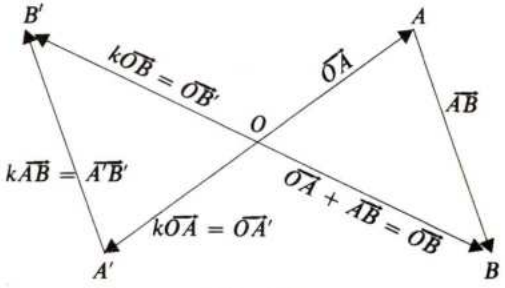


(Fig. 23)

De $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'}$ se tiene:

$$[\overrightarrow{OA'}] + [\overrightarrow{A'B'}] = [\overrightarrow{OB'}] \Longrightarrow k[\overrightarrow{OA}] + k[\overrightarrow{AB}] = k[\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}] \Longrightarrow k\vec{a} + k\vec{b} = k(\vec{a} + \vec{b})$$

2.º) En la figura 24 se ha representado el caso en que $k < 0$, cuya demostración es análoga a la anterior.



(Fig. 24)

8.3. Demostremos ahora la propiedad d)

$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, ya que $|1 \cdot \vec{a}| = |1|\,|\vec{a}| = |\vec{a}|$.

9 El espacio vectorial $(V^2, +, \cdot\, \mathbb{R})$

En el conjunto $\mathbf{V^2}$ de los vectores libres del plano se ha definido una operación interna, la adición, respecto de la cual $(\mathbf{V^2}, +)$ es un grupo conmutativo. Se ha definido también una operación externa: la multiplicación de elementos de $\mathbf{V^2}$ por números reales, que verifica las propiedades indicadas en el apartado **8.1.**

Por cumplir estas propiedades $(\mathbf{V^2}, +, \cdot\, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial real llamado espacio vectorial de los vectores libres del plano.

10 Bases y coordenadas

10.1. Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores libres no nulos de la misma dirección, existe un número real k tal que $k\vec{a} = \vec{b}$. Pues si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen el mismo sentido, basta tomar como $k = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, y si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen distinto sentido, $k = -\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

Con estos valores, $k\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores iguales, ya que tienen el mismo módulo y sentido (Figs. 25 y 26).

Como los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ anteriores son linealmente dependientes, se tiene que:

Dos vectores de la misma dirección son linealmente dependientes y recíprocamente, si $\vec{a} = k\vec{b}$. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos por lo dicho en **7.3.**

Ejemplos:

- Los vectores $\vec{a}$ y $-\vec{a}$ son linealmente dependientes, ya que $\vec{a} = (-1)(-\vec{a})$ o también $-\vec{a} = (-1)\vec{a}$.
- De la relación $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ se sigue que $\vec{a}$ y $\vec{0}$ son vectores libres linealmente dependientes.

10.2. Dados dos vectores, $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$, no nulos y de distinta dirección, forman una base de los vectores libres del plano.

Para ello hay que ver que son linealmente independientes y que todo vector de $\mathbf{V}^2$ se puede expresar como combinación lineal de ellos.

a) Los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son linealmente independientes.

Supongamos que $k\vec{u}_1 + h\vec{u}_2 = \vec{0}$ no implica $k = h = 0$, entonces será $k \neq 0$ o $h \neq 0$. Si $k \neq 0$, se tiene que $\vec{u}_1 = \dfrac{-h}{k}\,\vec{u}_2$ y los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son paralelos, es decir, tienen la misma dirección. Lo mismo se verifica si $h \neq 0$.

Luego $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son linealmente independientes.

b) Los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ engendran el espacio $\mathbf{V}^2$, es decir, cualquier vector $\vec{x}$ se puede expresar como combinación lineal de $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$

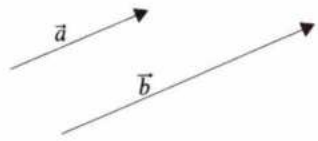
$$\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2,\ (x_1, y_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

En efecto: tomemos representantes $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OU_1}$ y $\overrightarrow{OU_2}$ de los vectores libres $\vec{x}, \vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ respectivamente. (Fig. 27.)

Por X se trazan paralelas a las rectas OU_1 y OU_2 que cortan a estas en los puntos X' y X'' respectivamente. Entonces se tiene:

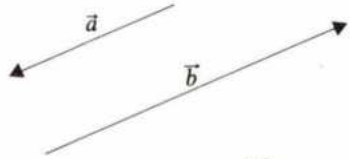
$$\overrightarrow{OX'} = x_1\vec{u}_1 \quad \text{y} \quad \overrightarrow{OX''} = y_1\vec{u}_2 \quad [1]$$

ya que los pares de vectores $\overrightarrow{OX}$, $\vec{u}_1$ y $\overrightarrow{OX''}$, $\vec{u}_2$ tienen la misma dirección.



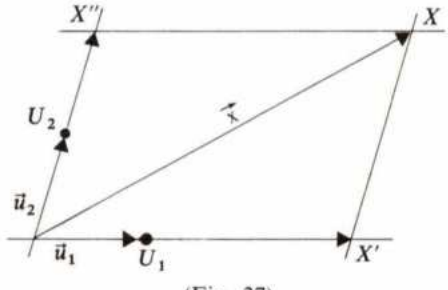
$$k\vec{a} = \vec{b},\ k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

(Fig. 25)



$$k\vec{a} = \vec{b},\ k = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

(Fig. 26)



(Fig. 27)

10. Se considera el conjunto de los vectores libres $\{k\vec{a} \mid \vec{a} \neq \vec{0}\}$ y un punto fijo O del plano.

¿Qué figura forman los extremos de los representantes con origen en O?

Por otra parte, $\vec{x} = \overrightarrow{OX'} + \overrightarrow{OX''}$, luego sustituyendo en esta igualdad los valores obtenidos en [1], resulta:

$$\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2$$

De a) y b) se deduce que $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es una base del conjunto $\mathbf{V}^2$ de los vectores libres del plano.

10.3. Probemos ahora, como en el tema 2, que la expresión del vector $\vec{x}$ como combinación lineal de los vectores de la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es única.

En efecto:

Si $\begin{cases}\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2 \\ \vec{x} = x'_1\vec{u}_1 + y'_1\vec{u}_2\end{cases}$, se tendrá: $x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2 = x'_1\vec{u}_1 + y'_1\vec{u}_2$

o lo que es lo mismo: $(x_1 - x'_1)\vec{u}_1 + (y_1 - y'_1)\vec{u}_2 = \vec{0}$

y como los vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ son linealmente independientes,

resulta: $\left.\begin{matrix}x_1 - x'_1 = 0 \\ y_1 - y'_1 = 0\end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \begin{cases}x_1 = x'_1 \\ y_1 = y'_1\end{cases}$

Por tanto, el par de números (x_1, y_1) correspondientes al vector $\vec{x}$ quedan unívocamente determinados por la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y se llaman coordenadas del vector $\vec{x}$ respecto de la base B.

En la figura 28 se han representado la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ y $\vec{d}$.

$\vec{a} = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_2$; coordenadas de $\vec{a}$: $(3, 1)$
$\vec{b} = 4\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$; coordenadas de $\vec{b}$: $(4, 3)$
$\vec{c} = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$; coordenadas de $\vec{c}$: $(2, 3)$
$\vec{d} = 2\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2$; coordenadas de $\vec{d}$: $(2, 5)$

10.4. La suma de vectores libres y el producto de un vector por un número, cuando vienen referidos a una base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, se calcula aplicando las definiciones y propiedades estudiadas.

Si $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2$ e $\vec{y} = x_2\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2$, entonces

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2) + (x_2\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2) = \\ = (x_1 + x_2)\vec{u}_1 + (y_1 + y_2)\vec{u}_2$$

Es decir, la suma de dos vectores referidos a una base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ tiene por coordenadas la suma de las coordenadas de los sumandos.

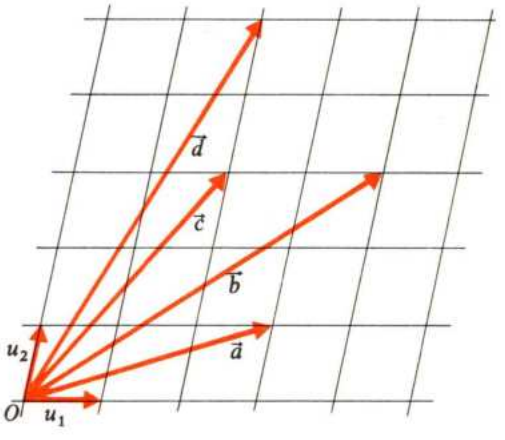
Ejemplo:

- $\vec{x} = 3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$, $\vec{y} = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2$, entonces la suma es

$$\vec{x} + \vec{y} = (3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2) + (2\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = 5\vec{u}_1 - \vec{u}_2$$

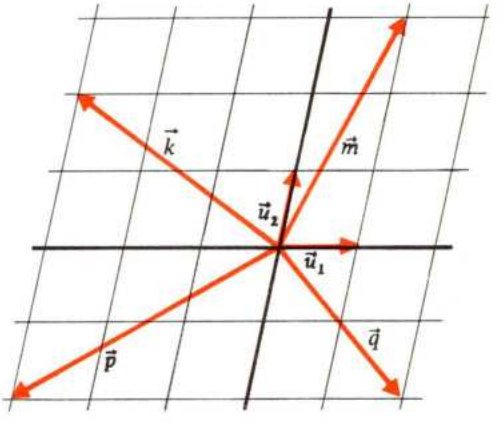
Si $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2$ y α es un número real, entonces

$$\alpha\vec{x} = \alpha(x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2) = (\alpha x_1)\vec{u}_1 + (\alpha y_1)\vec{u}_2$$



(Fig. 28)

11. Escribe los vectores representados en la figura siguiente respecto de la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$. ¿Cuáles son sus coordenadas?



12. Calcula los siguientes vectores:

a) $\vec{x} + \vec{y}$

b) $\vec{x} - \vec{y}$

c) $2\vec{x}$

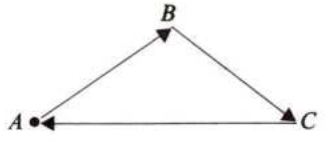
d) $3\vec{x} - 5\vec{y}$,

siendo $\vec{x} = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ e $\vec{y} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

Ejercicios y cuestiones

13. Demuestra que $-(-\vec{a}) = \vec{a}$.

14. Dados los vectores de la siguiente figura halla la suma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.



¿Se verifica también la siguiente relación?

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

15. Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independientes, el vector suma $\vec{a} + \vec{b}$ se interpreta geométricamente como la diagonal del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$. En el mismo paralelogramo busca el significado de $\vec{a} - \vec{b}$ y $\vec{b} - \vec{a}$.

16. Dibuja tres vectores del plano cuya suma sea el vector $\vec{0}$.

17. Se considera el conjunto de vectores $\vec{a}, \vec{b}$ linealmente independientes, y los vectores del conjunto F,

$$F = \{\vec{x} = t\vec{a} + s\vec{b} \,|\, t,s \in [0, 1]\}$$

¿Cuál es el conjunto de puntos del plano determinado por el conjunto F?

18. Se consideran los seis vértices A, B, C, D, E, F de un exágono regular. Ordena los puntos de modo que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$.

19. Se considera el conjunto de los vectores libres $F = \{k\vec{a} \,|\, \vec{a} \neq \vec{0},\ 0 \leqslant k \leqslant 1\}$ y un punto fijo O del plano. ¿Qué figura forman los extremos de los representantes de origen O?

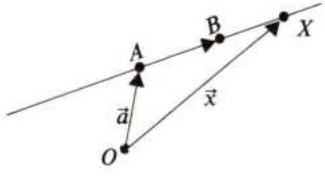
20. Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tres vectores del plano con origen O y extremos A, B, C respectivamente.

a) Si el cuadrilátero $OABC$ es un paralelogramo del que A y C son vértices opuestos, demuestra que

$$\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{b}$$

b) ¿Qué teorema geométrico referente a paralelogramos se puede deducir de la ecuación vectorial dada en a)?

21. Se consideran los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{AB}$ de la siguiente figura y el conjunto de vectores:



$$F = \{\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$$

¿Qué figura forman los extremos de los vectores del conjunto F?

22. Dibuja en una hoja cuadriculada dos vectores, $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$, no nulos y de distinta dirección, es decir, una base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ de $\mathbf{V}^2$.

Representa:

a) $\vec{x} = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2$

b) $\vec{x} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$

c) $\vec{x} = -\vec{u}_1 + \vec{u}_2$

d) $\vec{x} = 2\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$

Tema 4 PLANO AFIN

En la primera parte del tema se estudian las biyecciones entre los tres conjuntos siguientes:

Plano geométrico **P**, *espacio vectorial de los vectores libres del plano* $\mathbf{V}^2$, *y espacio numérico* $\mathbb{R}^2$.

Se introduce un sistema de coordenadas cartesianas. Con este sistema se pueden estudiar las propiedades del plano geométrico por métodos vectoriales y algebraicos.

En la segunda parte del tema se aplica lo estudiado a algunos casos sencillos a fin de aprender a utilizar esta nueva herramienta.

1 Correspondencia entre puntos del plano y vectores libres

1.1. Dado un punto O del plano y un vector libre $\vec{a}$, existe un único representante de origen O y perteneciente a $\vec{a}$. (Fig. 1.)

Esta propiedad, demostrada en el tema anterior, permite establecer una biyección entre los puntos del plano y los vectores libres si se ha fijado previamente un punto del plano.

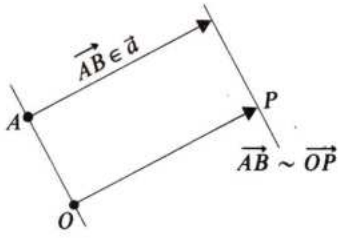
Sea O un punto fijo del plano; la biyección queda determinada puesto que:

a) A cada vector libre $\vec{a}$ de $\mathbf{V}^2$ le corresponde el punto A del plano, tal que $[\overrightarrow{OA}] = \vec{a}$. (Fig. 2.)

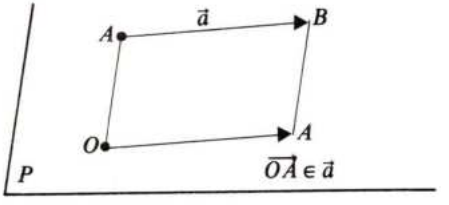
El punto A es único por serlo el representante $\overrightarrow{OA}$ de $\vec{a}$.

b) A cada punto A del plano **P** le corresponde el vector libre $[\overrightarrow{OA}]$. (Fig. 2.)

El vector libre $[\overrightarrow{OA}]$ es único por serlo el vector fijo $\overrightarrow{OA}$.



(Fig. 1)



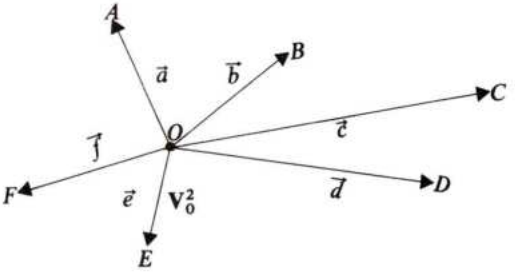
(Fig. 2)

1.2. La aplicación biyectiva de **P** en $\mathbf{V}^2$ la designaremos por p_0. Por tanto, $p_0(A) = [\overrightarrow{OA}]$ y $p_0^{-1}([\overrightarrow{OA}]) = A$.

El vector fijo $\overrightarrow{OA}$ se llama *vector de posición* del punto A relativo a O.

Mediante la aplicación p_0 queda asociado a cada punto un vector de posición y recíprocamente.

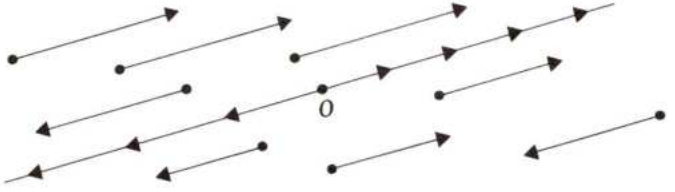
En adelante los vectores libres asociados por p_0 a los puntos $A, B, C, \ldots$ se designarán con las letras $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$ respectivamente, y los vectores de posición correspondientes, con $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \ldots$ El conjunto de los vectores de posición de origen O se designará por $\mathbf{V}_0^2$. (Fig. 3.)

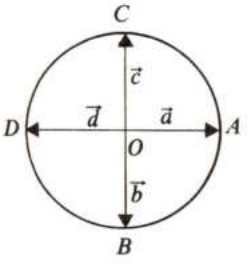


(Fig. 3)

Ejemplos:

- Si C es el conjunto de vectores libres que tienen el mismo módulo, le corresponde en el plano un conjunto de puntos que forman una circunferencia. (Fig. 4.)
- Dos puntos A y A', simétricos respecto de O tienen como vectores asociados vectores opuestos $\vec{a}$ y $-\vec{a}$. (Fig. 5.)
- Al conjunto de vectores libres que tienen la misma dirección le corresponde en el plano un conjunto de puntos situados en una recta. (Ver figura siguiente.)





$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}|$

(Fig. 4)

(Fig. 5)

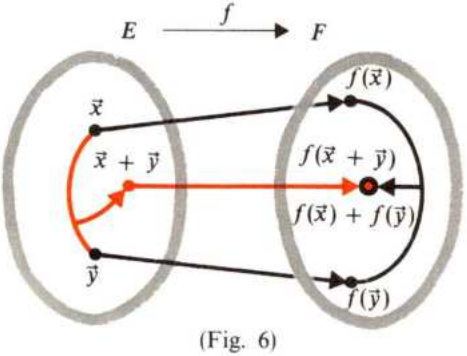
2 Correspondencia entre los espacios vectoriales V^2 y $\mathbb{R}^2$

2.1. Entre las aplicaciones que se pueden establecer entre dos espacios vectoriales interesan aquellas que conservan la estructura.

Si E y F son los espacios vectoriales, una aplicación f de E en F es un *homomorfismo* o *aplicación lineal* cuando se verifican las dos condiciones siguientes:

a) $\mathbf{f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})}$ (Fig. 6)

b) $\mathbf{f(k\vec{x}) = kf(\vec{x})}$ (Fig. 7)



(Fig. 6)

Ejemplo:

- Se define la aplicación f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ así: $f(a, b) = (a, 0)$

  Sean $\vec{x} = (a, b)$ e $\vec{y} = (a', b')$, f es un homomorfismo, ya que:

  a) $f(\vec{x} + \vec{y}) = f[(a, b) + (a', b')] = f(a + a',\ b + b') = (a + a',\ 0)$

  $f(\vec{x}) = f(a, b) = (a, 0)$; $f(\vec{y}) = f(a', b') = (a', 0)$

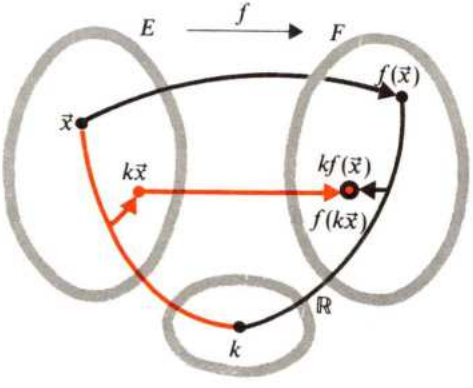
  $f(\vec{x}) + f(\vec{x}) = (a, 0) + (a', 0) = (a + a', 0)$

  Luego $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$

  b) $f(k\vec{x}) = f[k(a, b)] = f(ka, kb) = (ka, 0)$

  $kf(\vec{x}) = kf(a, b) = k(a, 0) = (ka, 0)$

  Luego $f(k\vec{x}) = kf(\vec{x})$.



(Fig. 7)

Por tanto, f verifica las dos condiciones para ser un homomorfismo entre espacios vectoriales.

La aplicación lineal f se dice que es un isomorfismo cuando f es una aplicación biyectiva de E en F. En este caso, se dice que los espacios vectoriales E y F son *isomorfos*.

2.2. En este apartado se establece un isomorfismo entre los espacios vectoriales $\mathbf{V}^2$ y $\mathbb{R}^2$.

Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base de $\mathbf{V}^2$.

Un vector $\vec{x}$ de $\mathbf{V}^2$ se escribe respecto a la base B de forma única así:

$$\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2, \qquad x_1, y_1 \in \mathbb{R}$$

Se define la aplicación b de $\mathbf{V}^2$ en $\mathbb{R}^2$ de la siguiente manera:

$$b : \mathbf{V}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\mathbf{b(x_1u_1 + y_1u_2) = (x_1, y_1)}$$

Cada vector $\vec{x}$ de $\mathbf{V}^2$ tiene por imagen en $\mathbb{R}^2$ un vector cuyas componentes son las coordenadas de $\vec{x}$ respecto de la base

$$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$$

Ejemplo:

- Si $\vec{x} = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$, su imagen por b es:

$$b(3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2) = (3, 2)$$

2.3. La aplicación b de $\mathbf{V}^2$ en $\mathbb{R}^2$ es biyectiva.

a) b es una aplicación inyectiva.

Sean $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2$, $\vec{y} = x_2\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2$ dos vectores de V.

Se tiene, según se demuestra al margen, que

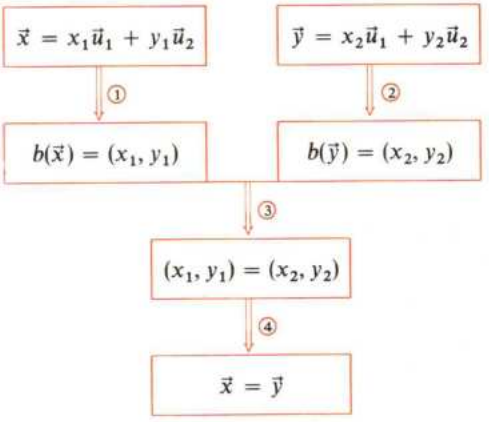
$$b(\vec{x}) = b(\vec{y}) \Longrightarrow \vec{x} = \vec{y}$$

b) b es una aplicación suprayectiva.

Todo vector $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ tiene al menos un original en $\mathbf{V}^2$.

En efecto, basta tomar como vector en $\mathbf{V}^2$

$$\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2, \quad \text{ya que}$$
$$b(\vec{x}) = b(x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2) = (x_1, y_1).$$



Ejercicios:

1. Se considera la aplicación $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2)$.

   Demuestra que f es una aplicación lineal.

2. Sea la aplicación f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida por $f(a, b, c) = (a, b)$.

   Demuestra que f es una aplicación lineal.

3. Razona cada uno de los pasos de la demostración de la propiedad que afirma que la aplicación b es biyectiva.

2.4. La aplicación b de $\mathbf{V}^2$ en $\mathbb{R}^2$ es un isomorfismo.

a) $b(\vec{x} + \vec{y}) = b(\vec{x}) + b(\vec{y})$, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}^2$.

Se tiene: $b(\vec{x} + \vec{y}) = b(x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2) + (x_2\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2) =$

$$= b(x_1 + x_2)\vec{u}_1 + (y_1 + y_2)\vec{u}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) =$$

$$= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = b(\vec{x}) + b(\vec{y})$$

La imagen de una suma de vectores es igual a la suma de las imágenes.

Ejemplo:

- Sean $\vec{x} = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$, $\vec{y} = 5\vec{u}_1 - \vec{u}_2$, $\vec{x} + \vec{y} = 8\vec{u}_1 + \vec{u}_2$

$$b(\vec{x}) = b(3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2) = (3, 2)$$
$$b(\vec{y}) = b(5\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = (5, -1)$$
$$b(\vec{x} + \vec{y}) = b(8\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = (8, 1) = b(\vec{x}) + b(\vec{y})$$

b) Probemos ahora que $b(k\vec{x}) = kb(\vec{x})$

$$b(k\vec{x}) = b(k(x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2)) = b((kx_1)\vec{u}_1 + (ky_1)\vec{u}_2) =$$

$$= (kx_1, ky_1) = k(x_1, y_1)$$

La imagen del producto de un vector por un número real es igual al producto de la imagen del vector por dicho número.

Ejemplo:

- Sean $\vec{x} = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$, $5\vec{x} = 15\vec{u}_1 + 10\vec{u}_2$

$$b(\vec{x}) = b(3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2) = (3, 2)$$
$$b(5\vec{x}) = b(15\vec{u}_1 + 10\vec{u}_2) = (15, 10) = 5b(\vec{x})$$

La aplicación b nos permite trabajar indistintamente en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbf{V}^2$. Este isomorfismo traduce toda relación geométrica de $\mathbf{V}^2$ a una relación numérica en $\mathbb{R}^2$.

4. Comprueba que $3b(\vec{x}) = b(3\vec{x})$

$$\vec{x} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$$

5. Comprueba que

$$b(3\vec{x} - 2\vec{y}) = 3b(\vec{x}) - 2b(\vec{y})$$

siendo $\begin{cases} \vec{x} = \vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 \\ \vec{y} = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \end{cases}$

3 Plano afín. Sistema de referencia afín

3.1. Se llama plano afín a la terna $(\mathbf{P}, \mathbf{V}^2, p)$ en la que p es una aplicación de $\mathbf{P} \times \mathbf{P}$ en $\mathbf{V}^2$

$$p : \mathbf{P} \times \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{V}^2 \text{ definida por}$$
$$(A, B) \longrightarrow p(A, B) = [\overrightarrow{AB}] \quad \text{tal que:}$$

a) $p(A, B) + p(B, C) + p(C, A) = \vec{0}$, es decir,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \qquad \forall, A, B, C \in \mathbf{P}$$

b) Fijado $O \in \mathbf{P}$, la aplicación $p_0 : \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{V}^2$ definida por $A \longrightarrow p_0(A) = [\overrightarrow{OA}]$ es biyectiva.

Obsérvese que $p_0(A) = p(O, A)$.

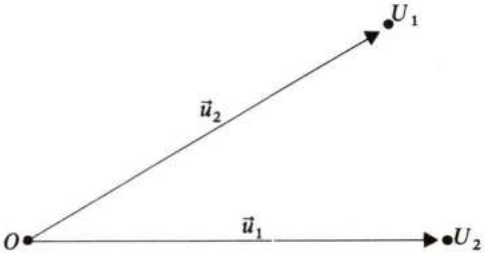
Llamaremos puntos del plano afín a los puntos del plano **P**. Las propiedades afines de este conjunto de puntos serán las que se puedan estudiar a través de esta biyección.

3.2. *Se llama sistema de referencia afín al conjunto* $\mathcal{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ *donde* O *es un punto fijo del plano y* $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ *una base de* $\mathbf{V}^2$.

Tres puntos no alineados $\{O; U_1, U_2\}$ determinan un *sistema de referencia afín.*

Los vectores libres $\overrightarrow{OU}_1 = \vec{u}_1$ y $\overrightarrow{OU}_2 = \vec{u}_2$ forman una base de $\mathbf{V}^2$, ya que no están contenidos en la misma recta.

Por tanto $\{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es un sistema de referencia (Fig. 8). En adelante un sistema de referencia afín en el plano $\mathbf{V}^2$ será $\mathcal{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ o bien $\mathcal{R} = \{O; U_1, U_2\}$, donde O, U_1 y U_2 son tres puntos no alineados.



(Fig. 8)

4 Coordenadas cartesianas en el plano afín

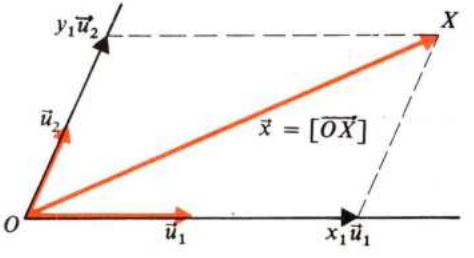
4.1. Dado un sistema de referencia afín $\mathcal{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, queda definida una biyección p_0 de **P** en $\mathbf{V}^2$; esta biyección asocia a cada punto del plano un vector de $\mathbf{V}^2$. En efecto: al punto X (Fig. 9) del plano **P** le corresponde por la aplicación p_0 el vector $[\overrightarrow{OX}] = \vec{x}$, que en la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$

$$\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2$$

Si aplicamos ahora el isomorfismo b entre $\mathbf{V}^2$ y $\mathbb{R}^2$, resulta que

$$b(\vec{x}) = b(x_1\,\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2) = (x_1, y_1)$$

Por definición se llaman *coordenadas cartesianas* (o simplemente coordenadas) del punto X respecto del sistema de referencia afín $\mathcal{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ al vector (x_1, y_1) de $\mathbb{R}^2$.



(Fig. 9)

La aplicación c de **P** en $\mathbb{R}^2$ es la compuesta de las biyecciones p_0 y b, como se indica en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccc} & & p_0 & & b \\ \mathbf{P} & \longrightarrow & \mathbf{V}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ X & \longrightarrow & \vec{x} & \longrightarrow & (x_1, y_1) \\ & \underbrace{\qquad\qquad} & & \underbrace{\qquad\qquad} & \\ & & c & & \end{array}$$

es decir

$$c = b \circ p_0 \text{ y } c(X) = (b \circ p_0)(X) = b[p_0(X)] = b(\vec{x}) = (x_1, y_1)$$

Ejemplos:

- En la figura 10 se han representado las coordenadas de algunos puntos del plano.

  $A \xrightarrow{c} (2, 2); B \xrightarrow{c} (3, 1); C \xrightarrow{c} (2, -1); D \xrightarrow{c} (-1, 1)$

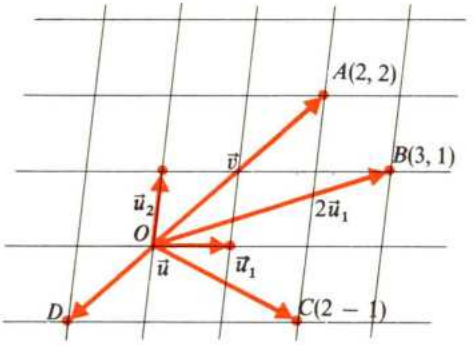
- En la misma figura la relación entre puntos del plano **P**, vectores libres de $\mathbf{V}^2$, y vectores de $\mathbb{R}^2$ es:

$$A \longrightarrow [\overrightarrow{OA}] = \vec{a} = 2\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 \longrightarrow (2, 2)$$
$$B \longrightarrow [\overrightarrow{OB}] = \vec{b} = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \longrightarrow (3, 1)$$
$$C \longrightarrow [\overrightarrow{OC}] = \vec{c} = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 \longrightarrow (2, -1)$$
$$D \longrightarrow [\overrightarrow{OD}] = \vec{d} = -\vec{u}_1 - \vec{u}_2 \longrightarrow (-1, -1)$$

- Si tomamos como referencia $\mathscr{R} = \{O; 2\vec{u}_1, 2\vec{u}_2\}$, (Fig. 10) las coordenadas del punto A son $(1, 1)$.

La aplicación c que asocia a cada punto sus coordenadas cartesianas depende de la referencia afín.

Si (x_1, y_1) son las coordenadas del punto A, se escribe $A(x_1, y_1)$.

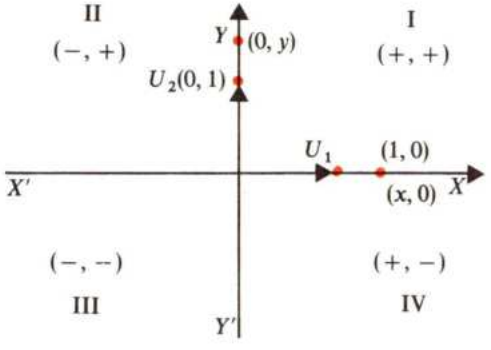


(Fig. 10)

4.2. Las rectas OU_1 y OU_2 del sistema de referencia afín se designan clásicamente por XX', YY' y los semiejes por OX, OX', OY, OY' (Fig. 11).

OX y OY son los semiejes positivos y OX' y OY' los negativos. Las coordenadas de los puntos interiores a cada una de las cuatro regiones en que dividen al plano las rectas XX', YY' tienen su signo tal como se indica en la figura 11.

Los puntos del eje de abcisas XX' tienen la segunda coordenada nula, es decir, son de la forma $(x, 0)$, y los puntos del eje de ordenadas YY' tienen la primera coordenada nula, son de la forma $(0, y)$.



(Fig. 11)

Ejemplo:

- Las coordenadas de los puntos U_1 y U_2 son $(1, 0)$ y $(0, 1)$ en la referencia $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

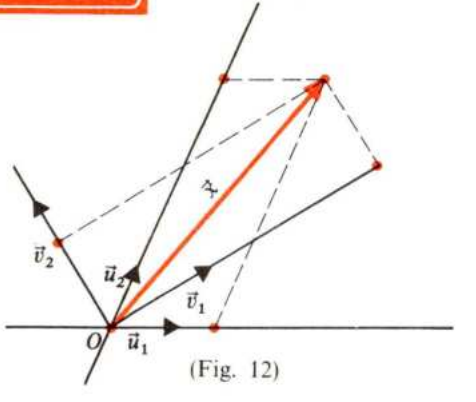
6. Dada una referencia afín $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, dibuja en el plano los puntos cuyas coordenadas son $(3, 1)$, $(2, 3)$, $(-1, -1)$, $(0, 1)$.

5 Cambio de base en el espacio vectorial $\mathbf{V}^2$

Sean $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ dos bases del espacio vectorial $\mathbf{V}^2$ y $\vec{x}$ un vector de $\mathbf{V}^2$.

Sean (x, y) las coordenadas de $\vec{x}$ respecto de la base B, y (x', y') las coordenadas de $\vec{x}$ respecto de la base B'; el cambio de base consiste en expresar unas coordenadas en función de las otras (Fig. 12).

Supongamos que queremos hallar las coordenadas de $\vec{x}$ en la base B' conocidas las coordenadas de $\vec{x}$ en la base B. Para ello es suficiente conocer la expresión de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ en la base B'.



(Fig. 12)

El vector $\vec{x}$ se expresa en la base B por: $\vec{x} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2$

y en la base B' por: $\vec{x} = x'\vec{v}_1 + y'\vec{v}_2$

Sean (a_{11}, a_{12}) las coordenadas de $\vec{u}_1$ respecto de la base B' y (a_{21}, a_{22}) las coordenadas de $\vec{u}_2$ respecto de la misma base B'; es decir:

$$\vec{u}_1 = a_{11}\vec{v}_1 + a_{12}\vec{v}_2$$
$$\vec{u}_2 = a_{21}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2$$

Entonces para el vector $\vec{x}$ se tienen las siguientes expresiones:

$$\vec{x} = x'\vec{v}_1 + y'\vec{v}_2 = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 =$$
$$= x(a_{11}\vec{v}_1 + a_{12}\vec{v}_2) + y(a_{21}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2) =$$
$$= (a_{11}x + a_{21}y)\vec{v}_1 + (a_{12}x + a_{22}y)\vec{v}_2$$

y por ser $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ una base de $\mathbf{V}^2$ las coordenadas de $\vec{x}$ respecto de B' serán únicas, luego

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{21}y \\ y' &= a_{12}x + a_{22}y \end{aligned} \qquad [1]$$

Estas ecuaciones, llamadas de *cambio de base*, nos dan las coordenadas (x', y') de un vector $\vec{x}$ en la base B' en función de las coordenadas (x, y) del vector $\vec{x}$ en la base B y de las coordenadas de los vectores de la base B respecto de la base B'.

Ejemplos:

- Las fórmulas de cambio de base cuando

  $\begin{aligned} \vec{u}_1 &= 2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 \\ \vec{u}_2 &= \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \end{aligned}$ son $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x - y \end{cases}$

  ya que $a_{11} = 2$, $a_{12} = 3$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = -1$.

- Las coordenadas del vector $\vec{x}$ en la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ son (3, 1). ¿Cuáles son las coordenadas de $\vec{x}$ en la base $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ siendo $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ y $\vec{u}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$?

  Las ecuaciones del cambio de base son

  $$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases} \qquad [1]$$

  puesto que $a_{11} = 1$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = -1$.

  Siendo $(x, y) = (3, 1)$ resulta, sustituyendo en [1], que

  $$\begin{cases} x' = 3 + 1 = 4 \\ y' = 3 - 1 = 2 \end{cases}$$

7. Halla las fórmulas del cambio de base siendo $\vec{u}_1 = 4\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ y $\vec{u}_2 = 3\vec{v}_1 + 6\vec{v}_2$.

8. Halla las coordenadas del vector $\vec{x} = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$ en la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ del ejercicio anterior.

9. Se considera en $\mathbb{R}^2$ las bases dadas por

   $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$ y $B' = \{(0, 3), (2, 2)\}$.

   Si las coordenadas del vector $\vec{x}$ son (3, 5) en la base B, halla las coordenadas de $\vec{x}$ en la base B'.

6 Cambio de sistema de referencia en el plano afín

6.1. Sean $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $\mathscr{R}' = \{O'; \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ dos referencias del plano afín y X un punto de dicho plano.

Si (x, y) son las coordenadas del punto X respecto de la referencia $\mathscr{R}$ y (x', y') son las coordenadas de X respecto de la referencia $\mathscr{R}'$, el cambio de base en el plano afín consiste en expresar unas coordenadas en función de las otras.

Supongamos que queremos hallar las coordenadas del punto X en la referencia $\mathscr{R}'$, conocidas las coordenadas del punto X en la referencia $\mathscr{R}$. Para ello es suficiente conocer las coordenadas del punto O, o lo que es lo mismo, las coordenadas del vector $[\overrightarrow{O'O}]$ en la base $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ y la expresión de los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ en la base $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

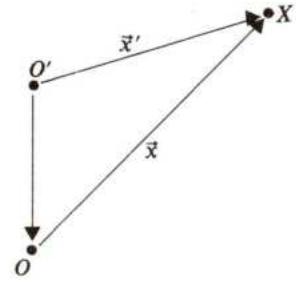
Sea, pues, el cambio de sistema dado por:

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{O'O}] &= a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 \\ \vec{u}_1 &= a_{11}\vec{v}_1 + a_{12}\vec{v}_2 \qquad [1] \\ \vec{u}_2 &= a_{21}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 \end{aligned}$$

Si $\vec{x}$ y $\vec{x}'$ son los vectores de posición del punto X referido a los dos sistemas $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$, se verificará:

$$\vec{x}' = [\overrightarrow{O'O}] + \vec{x} \qquad [2]$$

con $\vec{x} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2$ y $\vec{x}' = x'\vec{v}_1 + y'\vec{v}_2$. (Fig. 13)



(Fig. 13)

Por tanto:

$$\begin{aligned} x'\vec{v}_1 + y'\vec{v}_2 &= (a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2) + (x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2) = \\ &= (a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2) + x(a_{11}\vec{v}_1 + a_{12}\vec{v}_2) + y(a_{21}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2) = \\ &= (a + a_{11}x + a_{21}y)\vec{v}_1 + (b + a_{12}x + a_{22}y)\vec{v}_2 \end{aligned}$$

y por ser $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ una base de $\mathbf{V}^2$, las coordenadas de $\vec{x}'$ respecto de B' son únicas, luego

$$\begin{cases} x' = a + a_{11}x + a_{21}y \\ y' = b + a_{12}x + a_{22}y \end{cases} \qquad [3]$$

Estas ecuaciones son las fórmulas de cambio de sistema de referencia en el plano afín.

6.2. Las fórmulas de cambio de sistema de referencia de $\mathscr{R}'$ a $\mathscr{R}$ se obtienen despejando x e y en el sistema [3] y serán de la forma:

$$\begin{cases} x = a' + b_{11}y' + b_{21}y' \\ y = b' + b_{12}x' + b_{22}y' \end{cases} \qquad [4]$$

Ejemplos:

- ¿Cuáles son las fórmulas de cambio de referencia de

$$\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\} \quad \text{a} \quad \mathscr{R}' = \{O'; \vec{v}_1, \vec{v}_2\} \quad \text{siendo}$$

$$[\overrightarrow{O'O}] = 2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2,\ \vec{u}_1 = 4\vec{v}_1 - \vec{v}_2,\ \vec{u}_2 = 3\vec{v}_1 + 6\vec{v}_2?$$

Aplicando las fórmulas de cambio de referencia dadas en [3] resulta:

$$\begin{cases} x' = 2 + 4x + 3y \\ y' = -3 - x + 6y \end{cases} \qquad [5]$$

ya que $a = 2$, $b = -3$, $a_{11} = 4$, $a_{12} = -1$, $a_{21} = 3$, $a_{22} = 6$.

- Considereramos las referencias del ejemplo anterior. Si un vector tiene por coordenadas $(x, y) = (1, 0)$, respecto del referencial $\mathscr{R}$, ¿cuáles son las coordenadas (x', y') respecto del referencial $\mathscr{R}'$?

Sustituyendo en las fórmulas del cambio de coordenadas [5], resulta:

$$\begin{cases} x' = 2 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 6 \\ y' = -3 - 1 + 6 \cdot 0 \end{cases}$$

Por tanto $(x', y') = (6, -4)$.

6.3. *Casos particulares.*

a) Consideremos en primer lugar el caso en que las bases sean iguales:

$$B = B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}\}$$

En este caso se tiene $\vec{x}' = [\overrightarrow{O'O}] + \vec{x}$ (Fig. 14), es decir

$$\vec{x}' = x'\vec{v}_1 + y'\vec{v}_2 = (a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2) + (x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2) =$$
$$= (a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2) + (x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2) = (a + x)\vec{v}_1 + (b + y)\vec{v}_2$$

de donde

$$\begin{cases} x' = a + x \\ y' = b + y \end{cases} \qquad [6]$$

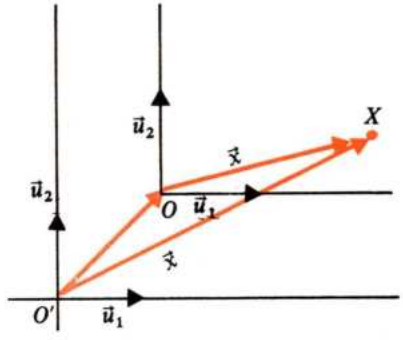
Se llama *traslación de la base* al cambio de sistema de referencia dado por las ecuaciones [6].

b) Los sistemas de referencia $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$ tienen el mismo origen.

En este caso $O \equiv O'$ y, por tanto, $[\overrightarrow{O'O}] = 0$, o lo que es igual, sus componentes son nulos, $a = b = 0$.

Las ecuaciones de cambio de sistema de referencia se reducen ahora a

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{21}y \\ y' = a_{12}x + a_{22}y \end{cases}$$



$$\vec{x}' = [\overrightarrow{O'O}] + \vec{x}$$

(Fig. 14)

10. Halla las fórmulas de cambio de sistema de referencia siendo

$$[\overrightarrow{O'O}] = 3\vec{v}_2 + \vec{v}_1$$
$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$
$$\vec{u}_2 = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$$

Halla las coordenadas en la base $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ del vector $\vec{x}$ si en la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ son $(1, -2)$.

11. Halla las fórmulas del cambio de sistema de referencia siendo

$$[\overrightarrow{O'O}] = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_2,\ \vec{v}_1 = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2, \quad \text{y}$$
$$\vec{v}_2 = \vec{u}_1 + 5\vec{u}_2$$

12. Halla las fórmulas del cambio de sistema de referencia siendo

$$[\overrightarrow{O'O}] = 2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2,\ \vec{u}_1 = 4\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \quad \text{y}$$
$$\vec{u}_2 = 3\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2$$

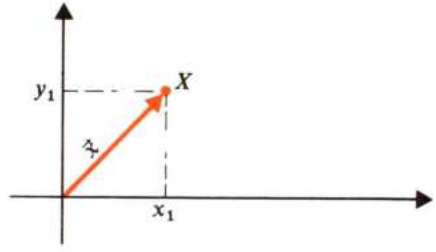
7.1. Las propiedades afines del plano **P** son aquellas que se pueden estudiar haciendo uso únicamente de la estructura vectorial de $\mathbf{V}^2$. Las distancias y ángulos no son propiedades afines sino métricas.

Al margen se ha indicado el proceso para el estudio de las propiedades del plano afín.

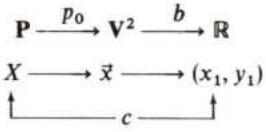
Las figuras del plano geométrico **P**, (conjunto de puntos) (Fig. 15), se estudian por medio de los vectores libres de $\mathbf{V}^2$, a quienes corresponde un conjunto de vectores numéricos en $\mathbb{R}^2$.

Por tanto, si existe una relación geométrica afín entre los puntos de una figura F de **P**, esa relación da lugar a una relación vectorial entre los vectores libres del espacio $\mathbf{V}^2$ y a una relación algebraica entre las coordenadas x, y de los puntos de F.

Como aplicación de este proceso se estudian algunas cuestiones en los siguientes apartados.



(Fig. 15)



7.2. *Componentes de un vector libre dado por dos puntos.*

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos del plano afín. (Fig. 16.)

$\vec{a}$ y $\vec{b}$ son los vectores de posición de los puntos A y B. El vector $\overrightarrow{AB}$ que determinan estos puntos es:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (x_2\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2) - (x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2) =$$
$$= (x_2 - x_1)\vec{u}_1 + (y_2 - y_1)\vec{u}_2$$

ya que $\vec{a} + \overrightarrow{AB} = \vec{b}$.

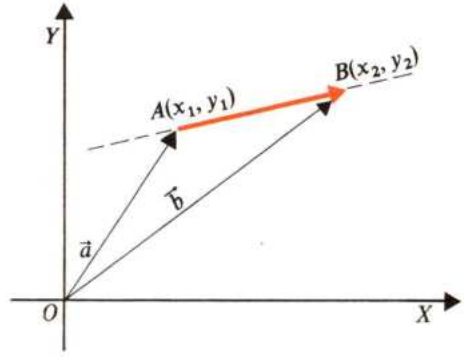
Aplicando el isomorfismo entre $\mathbf{V}^2$ y $\mathbb{R}^2$, y llamando (m, n) a las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$, se tiene:

$$(m, n) = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \qquad [1]$$

$$\text{o también} \begin{cases} m = x_2 - x_1 \\ n = y_2 - y_1 \end{cases}$$

Ejemplos:

- Si $A(3, 4)$ y $B(-2, 1)$, las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ son $(m, n) = (-2, 1) - (3, 4) = (-2 - 3,\ 1 - 4) = (-5, -3)$.



(Fig. 16)

- Las componentes de un vector $\overrightarrow{AB}$ son (2, 3), y las coordenadas del punto $B(0, 1)$. ¿Cuáles son las coordenadas de A?

  Si $B(0, 1) = (x_2, y_2)$ se trata de hallar $A(x_1, y_1)$. Se tiene:

$$(2, 3) = (0 - x_1, 1 - y_1) \quad \text{de donde}$$
$$\begin{cases} 2 = -x_1 \\ 3 = 1 - y_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = -2 \end{cases}$$

Dos vectores, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, equipolentes, tienen sus componentes iguales, y recíprocamente

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow (a, b) = (a', b')$$

Siendo (a, b) las componentes de $\overrightarrow{AB}$ y
(a', b') las componentes de $\overrightarrow{CD}$.

Esto es consecuencia del isomorfismo de $\mathbf{V}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

7.3. *Coordenadas del punto medio de un segmento $\overline{AB}$.*

Sean A y B dos puntos del plano afín **P**, y $\overline{AB}$ el segmento que determinan. El punto medio M de $\overline{AB}$ es un punto tal que

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$$

Los vectores de posición de los puntos A, M, B son respectivamente $\vec{a}$, $\vec{m}$ y $\vec{b}$ (Fig. 17). El valor del vector $\vec{m}$ se obtiene así:

$$\vec{m} = \vec{a} + \overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}\,(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

Si $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $M(x, y)$, la relación anterior se expresa mediante coordenadas del modo siguiente:

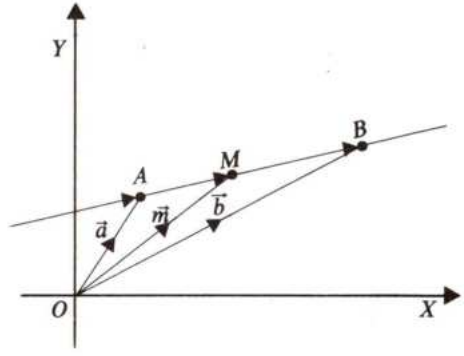
$$(x, y) = \frac{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)}{2} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$\mathbf{M}\begin{cases} \mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}}{\mathbf{2}} \\ \mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{y_1} + \mathbf{y_2}}{\mathbf{2}} \end{cases}$$

Ejemplos:

- Las coordenadas de los puntos A y B son respectivamente (2, 1) y (4, 5). Las coordenadas del punto medio $M(x, y)$ son

$$(x, y) = \frac{(2, 1) + (4, 5)}{2} = (3, 3)$$



(Fig. 17)

13. Las componentes de un vector $\overrightarrow{AB}$ son $(3, -3)$. Halla las coordenadas del punto B sabiendo que las de A son $(1, -1)$.

- Las coordenadas del punto medio M de AB son $(1, 1)$ y $(0, 2)$ las de A. ¿Cuáles son las de B?

  Si B tiene por coordenadas (x_2, y_2), se verifica:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{0 + x_2}{2} \\ 1 &= \frac{2 + y_2}{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{de donde} \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

- Si $A_m(2, 1)$, $B_m(3, 3)$ y $C_m(6, 2)$ son los puntos medios de los lados de un triángulo, ¿cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo?

  Aplicando las ecuaciones del punto se obtienen los sistemas siguientes:

$$\begin{cases} 6 = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ 2 = \dfrac{x_2 + x_3}{2} \\ 3 = \dfrac{x_3 + x_1}{2} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 2 = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \\ 1 = \dfrac{y_2 + y_3}{2} \\ 3 = \dfrac{y_1 + y_3}{2} \end{cases}$$

  Resolviendo los sistemas se obtiene:

$$x_1 = 7,\ x_2 = 5,\ x_3 = -1$$
$$y_1 = 4,\ y_2 = 0,\ y_3 = 2$$

  Por tanto,

$$A(x_1, y_1) = A(7, 4)$$
$$B(x_2, y_2) = B(5, 0)$$
$$C(x_3, y_3) = C(-1, 2)$$

14. Halla las coordenadas de los puntos medios de los lados de un triángulo cuyos vértices son $A(1, 3)$, $B(2, 5)$, $C(1, -1)$.

15. Las coordenadas del punto medio de un segmento $\overline{AB}$ son $M(0, 1)$.

Si las coordenadas de B son $(1, 2)$, ¿cuáles son las del punto M?

7.4. *Razón simple.*

Consideremos los puntos A y B del plano afín **P**, y M un punto distinto de B perteneciente a la recta AB.

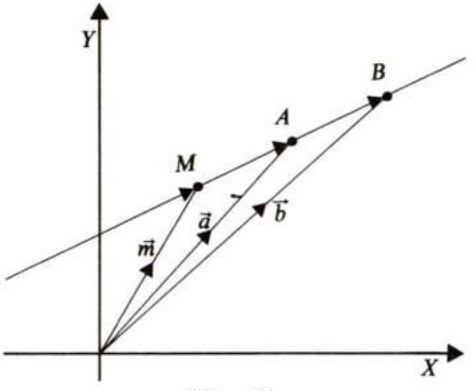
Se llama *razón simple de M, A y B*, y se designa por (MAB), al número real λ que verifica la relación vectorial

$$\overrightarrow{MA} = \lambda \overrightarrow{MB} \qquad \text{(Fig. 18)}$$

Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{m}$ son los vectores de posición de los puntos A, B y M respectivamente, se tiene:

$$\overrightarrow{MA} = \lambda \overrightarrow{MB} \Longrightarrow \vec{a} - \vec{m} = \lambda(\vec{b} - \vec{m}) = \lambda\vec{b} - \lambda\vec{m}$$
$$\vec{a} - \lambda\vec{b} = \vec{m} - \lambda\vec{m}$$
$$\vec{a} - \lambda\vec{b} = \vec{m}(1 - \lambda)$$

Por tanto $$\vec{\mathbf{m}} = \frac{\vec{\mathbf{a}} - \lambda\vec{\mathbf{b}}}{\mathbf{1} - \lambda} \qquad [1]$$



(Fig. 18)

$$\vec{m} = \frac{\vec{a} - \lambda\vec{b}}{1\lambda} \text{ (E. vectorial)}$$

Si $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $M(x, y)$, la relación anterior se expresa mediante coordenadas del modo siguiente:

$$(x, y) = \frac{(x_1, y_1) - \lambda(x_2, y_2)}{1 - \lambda} = \left(\frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}\right)$$

es decir $\quad x = \dfrac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}; \qquad y = \dfrac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}$

que son las *ecuaciones paramétricas* de la razón simple

Ejemplos:

- Vamos a hallar las coordenadas del punto $M(x, y)$ que dividen al vector $\overrightarrow{AB}$ en la razón $\lambda = \frac{1}{3}$, donde $A(-2, -5)$, $B(3, 4)$.

  Se tiene:

  $$\lambda \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}$$

  $$\frac{1}{3}(3 - x, 4 - y) = (-2 - x, -5 - y) \Longrightarrow (3 - x, 4 - y) =$$

  $$= 3(-2 - x, -5 - y) = (-6 - 3x, -15 - 3y) \Longrightarrow$$

  $$\begin{cases} 3 - x = -6 - 3x \Longrightarrow 2x = -9 \Longrightarrow x = -\dfrac{9}{2} \\ 4 - y = -15 - 3y \Longrightarrow 2y = -19 \Longrightarrow y = -\dfrac{19}{2} \end{cases}$$

- Hallamos las coordenadas de los puntos que dividen en tres partes iguales al vector cuyos extremos son $A(1, 3)$ y $B(5, -2)$. (Fig. 19.)

  Para el punto M_1 se tiene $\lambda = -\frac{1}{2}$ y $\overrightarrow{M_1A} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{M_1B}$

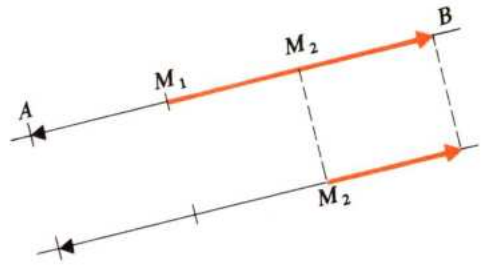
  $$x = \frac{1 + \frac{1}{2}\cdot 5}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{3}; \qquad y = \frac{3 - \frac{1}{2}\cdot 2}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$$

  Para el otro punto M_2, $\lambda = -2$ y $\overrightarrow{M_2A} = -2\overrightarrow{M_2B}$ quedando

  $$x = \frac{1 + 2\cdot 5}{1 + 2} = \frac{11}{3}; \qquad y = \frac{3 - 2\cdot 2}{1 + 2} = -\frac{1}{3}$$

  Las coordenadas de los puntos pedidos son

  $$M_1\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right) \quad \text{y} \quad M_2\left(\frac{11}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$



(Fig. 19)

7.5. *Baricentro de un triángulo.*

Se llama baricentro de un triángulo ABC al punto G de intersección de las medianas. (Fig. 20.)

16. Halla el valor de λ cuando M es el punto medio de $\overline{AB}$.

17. El segmento $\overline{AB}$ se divide en cuatro partes iguales. Halla el valor de λ para cada uno de los puntos de división.

El baricentro G de un triángulo descompone a cada mediana en dos partes cuyas longitudes están en la relación $\frac{2}{1}$, así

$$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$$

Si $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{g}$ son los vectores de posición de los puntos A, B, C y G respectivamente, el valor de $\vec{g}$ en función de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ se obtiene así:

$$\vec{g} = \vec{m} + \overrightarrow{MG} = \vec{m} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MC} = \vec{m} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MC} =$$

$$= \vec{m} + \frac{1}{3}(c - \vec{m}) = \frac{2\vec{m} + \vec{c}}{2}; \text{ y siendo } \vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}, \text{ resulta:}$$

$$\vec{\mathbf{g}} = \frac{\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}}{\mathbf{3}} \qquad [1]$$

que es la ecuación vectorial del baricentro.

Sean $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ y $G(x, y)$ las coordenadas de los puntos. Aplicando el isomorfismo entre $\mathbf{V}^2$ y $\mathbb{R}^2$ a partir de [1], resulta:

$$(x, y) = \frac{(x_1, y_1) + (x_2, y_2) + (x_3, y_3)}{3}$$

$$(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

Ejemplos:

- Los vértices de un triángulo tienen por coordenadas $A(1, 3)$, $B(2, 0)$ y $C(7, 5)$. Las coordenadas del baricentro son

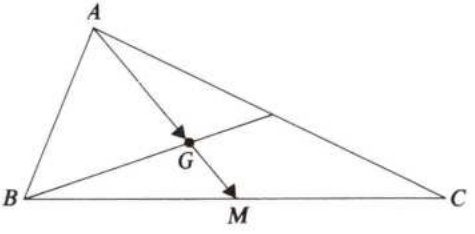
$$(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right) =$$

$$= \left(\frac{1 + 2 + 7}{3}, \frac{3 + 0 + 5}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

- Se considera el triángulo equilátero ABC. Si consideramos como sistema de referencia $\mathscr{R} = \{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ y las coordenadas de los vértices $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$, las coordenadas del baricentro serán:

$$x = \frac{0 + 1 + 0}{3} = \frac{1}{3}; \qquad y = \frac{0 + 0 + 1}{3} = \frac{1}{3}$$

Por tanto, $G(x, y) = G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.



(Fig. 20)

18. Halla las coordenadas del baricentro de un triángulo ABC sabiendo que $A(2, 1)$, $B(1, 0)$ y $C(-1, -1)$.

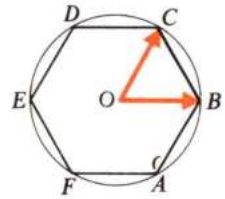
19. Las coordenadas de dos vértices de un triángulo son $A(1, 0)$ y $B(0, 1)$. ¿Cuáles son las coordenadas del tercer vértice si el baricentro tiene por coordenadas $G(1, 1)$?

Ejercicios y cuestiones

20. En un triángulo ABC el baricentro es $G(1, 2)$. El punto medio de AB es $M(2, 4)$ y el punto medio de BC es $N(3, -2)$. Halla los tres vértices del triángulo.

21. Considera el siguiente hexágono regular y el sistema de referencia $\mathscr{R} = \{O; \vec{OB}, \vec{OC}\}$.

Calcula las coordenadas de los vértices hallando previamente la expresión de los vectores $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, $\vec{OD}$, $\vec{OE}$ y $\vec{OF}$ en función de $\vec{OB} = \vec{u}_1$ y $\vec{OC} = \vec{u}_2$.



22. Halla las ecuaciones del punto medio de un segmento aplicando el método de la razón simple.

23. En un segmento $\overline{AB}$ se conocen las coordenadas de uno de los puntos de su recta, $C\left(\frac{7}{3}, \frac{10}{3}\right)$, el cuál divide al segmento de modo que $\lambda = \frac{1}{4}$. Halla las coordenadas de B, sabiendo que las de A son $(3, 4)$.

24. ¿Son equipolentes los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$, siendo $A(5, 3)$, $B(0, -3)$, $C(1, 1)$ y $D(-4, -5)$?

25. Siendo $(a, b) = (2, 5)$ las componentes del vector $\vec{AB}$ y $A(1, 2)$, halla las coordenadas de B.

26. El vector $\vec{PQ}$ es equipolente al vector $\vec{MN}$, siendo $P(1, 0)$, $Q(5, 7)$ y $M(0, 1)$. Halla las coordenadas del punto N.

27. Calcula la suma de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$, siendo $A(1, 1)$, $B(0, 2)$, $C(-2, 1)$ y $D(4, 7)$.

28. Halla las coordenadas del punto M tal que la razón simple en que divide al segmento $A(1, 2)$ y $B(8, 7)$ es $\lambda = \frac{1}{3}$.

29. El segmento $\overline{AB}$ se divide en cinco partes iguales. Halla el valor de las coordenadas de cada uno de los puntos de división.

30. Las coordenadas de un punto P en la referencia afín $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ son $P(4, 8)$. Halla las coordenadas del punto en la referencia $\{O; 2\vec{u}_1, 2\vec{u}_2\}$.

Tema 5 LA RECTA EN EL PLANO AFIN

La recta es la figura más sencilla del plano afín y por eso su estudio inicia siempre el de la geometría analítica (estudio de figuras geométricas por métodos algebraicos). En la primera parte del tema se estudian los diferentes tipos de ecuaciones de la recta, partiendo siempre de la ecuación vectorial.

En la segunda parte se aplican las ecuaciones ya obtenidas al desarrollo de las propiedades afines de la recta, como son el paralelismo y la incidencia.

1 Ecuación vectorial de la recta

1.1. Consideremos el conjunto de puntos alineados de la recta r (Fig. 1).

Vamos a buscar las condiciones que nos permitan saber cuándo un punto $A, B, C, \ldots, X$ pertenece o no a la recta r.

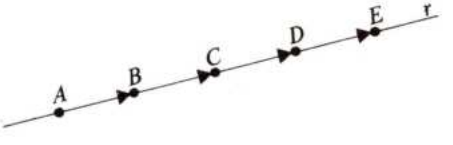
Fijado un punto A en r, los vectores de origen A que tienen por extremos puntos de r son paralelos.

$$\overrightarrow{AB} \,||\, \overrightarrow{AC} \,||\, \overrightarrow{AD} \,||\, \overrightarrow{AE}$$

Por tener la misma dirección, los vectores anteriores son proporcionales.

$$\overrightarrow{AC} = t_1\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AD} = t_2\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AE} = t_3\overrightarrow{AB} \text{ con } t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$$

Relaciones similares pueden escribirse si se eligen los puntos B, C o D en lugar del A.



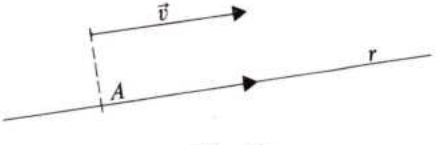
(Fig. 1)

1.2. Recíprocamente, sean $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\ldots$ vectores de $\mathbf{V}^2$ tales que

$$\overrightarrow{AC} = t_1\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AD} = t_2\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AE} = t_3\overrightarrow{AB}\ldots$$

Si tomamos en el plano representantes de estos vectores con origen en A, sus extremos $B, C, D, E\ldots$ estarán situados en una recta r que los contiene, ya que los vectores fijos $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}\ldots$ tienen la misma dirección, es decir, son paralelos, y tienen también un punto común A.

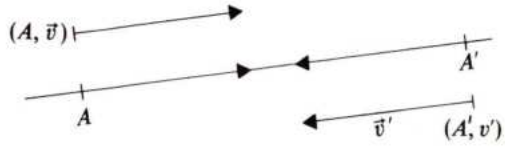
1.3. Las condiciones de **1.1.** y **1.2.** caracterizan a los puntos de una recta, es decir, *una recta r del plano* **P** *queda determinada de manera única por un punto* $A \in r$ *y un vector libre no nulo* $\vec{v} \in \mathbf{V}^2$ (Fig. 2).



(Fig. 2)

El par $(A, \vec{v})$ se dice que es una determinación lineal de r. El vector $\vec{v}$ se llama *vector director* o *vector de dirección* de la recta r.

Dos determinaciones distintas $(A, \vec{v})$ y $(A', \vec{v}')$ pueden dar lugar a la misma recta, basta elegir A y A' en la misma recta y los vectores $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ proporcionales, es decir, paralelos (Fig. 3).



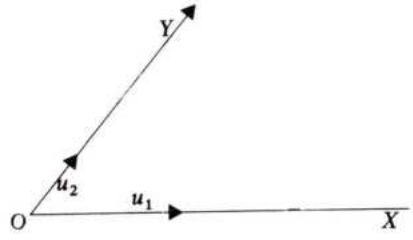
(Fig. 3)

Nos referimos a la determinación lineal $(A, \vec{v})$ de la recta r con el símbolo $r(A, \vec{v})$.

Ejemplos:

- En la figura 3, $r(A, \vec{v}) = r(A', \vec{v}')$.
- Sea $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una referencia del plano afín (Fig. 4). La recta OX tiene por determinación lineal $r(O, \vec{u}_1)$.

  La recta OY tiene por determinación lineal $r(O, \vec{u}_2)$.



(Fig. 4)

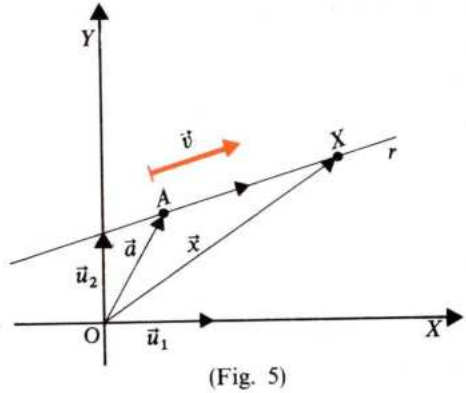
1.4. Sean $r(A, \vec{v})$ una determinación lineal de la recta r y $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ un sistema de referencia del plano afín.

Cualquier punto X de la recta r determina con A un vector $\overrightarrow{AX}$ tal que $\overrightarrow{AX} = t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$. (Fig. 5.)

Si $\vec{a}$ es el vector de posición del punto A y $\vec{x}$ es el vector de posición del punto X, se tiene que $\vec{a} + \overrightarrow{AX} = \vec{x}$; pero siendo $\overrightarrow{AX} = t\vec{v}$, obtenemos: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$ [1]

La relación [1] se llama *ecuación vectorial de la recta* dada por la determinación lineal $(A, \vec{v})$.

Dando valores a t en [1] se obtiene un conjunto de vectores $\vec{x}$ cuyos extremos están en r (si se toma como origen de los representantes el punto O).



(Fig. 5)

Ejemplos:

- En la figura 6 se han representado los puntos correspondientes a algunos valores de t:

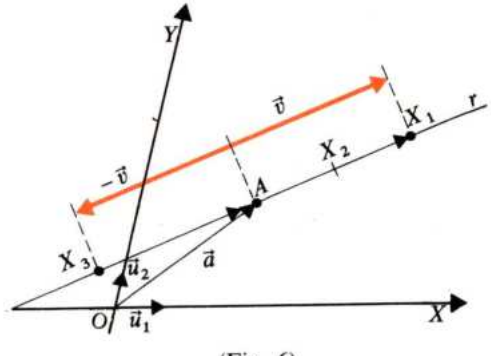
$t = 0 \Longrightarrow \vec{x} = \vec{a}$ y $X \equiv A$

$t = 1 \Longrightarrow \vec{x} = \vec{a} + \vec{v}$ y $X \equiv X_1$

$t = \frac{1}{2} \Longrightarrow \vec{x} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{v}$ y $X \equiv X_2$

$t = -1 \Longrightarrow \vec{x} = \vec{a} - \vec{v}$ y $X \equiv X_3$

- La ecuación vectorial del eje OX es $\vec{x} = t\vec{u}_1$. (Fig. 6.)
- La ecuación vectorial del eje OY es $\vec{x} = t\vec{u}_2$. (Fig. 6.)



(Fig. 6)

2 Ecuaciones paramétricas, continua y general de la recta

2.1. Si los vectores $\vec{a}, \vec{x}$ y $\vec{v}$ de la ecuación $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}$ se expresan en una referencia afín $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ por

$$\vec{a} = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2,\ \vec{v} = v_1\vec{u}_1 + v_2\vec{u}_2,\ \vec{x} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2,$$

se obtiene otra expresión de la ecuación de la recta en función de los vectores de la base:

$$x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 = (x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2) + t(v_1\vec{u}_1 + v_2\vec{u}_2) =$$
$$= (x_1 + tv_1)\vec{u}_1 + (y_1 + tv_2)\vec{u}_2$$

Aplicando el isomorfismo de $\mathbf{V}^2$ en $\mathbb{R}^2$, resulta:

$$(x, y) = (x_1 + tv_1,\ y_1 + tv_2) \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{x = x_1 + tv_1} \\ \mathbf{y = y_1 + tv_2} \end{cases} \quad [2]$$

Las relaciones [2] en $\mathbb{R}^2$ se llaman *ecuaciones paramétricas de la recta r*. Esta ecuación da los valores (x, y) en función de las coordenadas del punto $A(x_1, y_1)$ y de las componentes del vector de dirección $\vec{v}\ (v_1, v_2)$. El valor $t \in \mathbb{R}$ se llama *parámetro*.

A cada valor de t le corresponde un punto de r.

Ejemplos:

- La recta r determinada por $\vec{a}(2, 1)$ y $\vec{v}(1, 1)$ tiene por ecuaciones paramétricas las siguientes:

  $$(x, y) = (2, 1) + t(1, 1) = (2, 1) + (t, t) = (2 + t, 1 + t) \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \end{cases}$$

  En la figura 7 se ha representado la recta r.

- Calculemos las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $A(1, 2)$ y cuyo vector director es $\overrightarrow{CD}$, donde $C(4, 1)$ y $D(-1, 7)$.

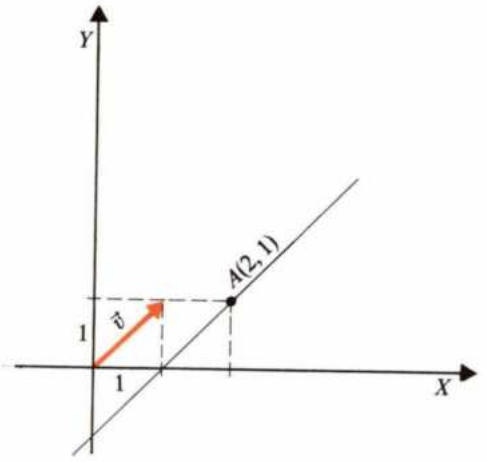
  Las componentes de $\overrightarrow{CD}$ son $\overrightarrow{CD}(-1 - 4,\ 7 - 1)$; $\overrightarrow{CD}(-5, 6)$.

  Las ecuaciones paramétricas son

  $$\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + 6t \end{cases}$$

2.2. A partir de las ecuaciones paramétricas [2] se pueden escribir sucesivamente las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{matrix} x = x_1 + tv_1 \\ y = y_1 + tv_2 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - x_1 = tv_1 \\ y - y = tv_2 \end{cases} \quad [3]$$



(Fig. 7)

Ejercicios:

1. Escribe la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $A(3, 2)$, de vector de posición $\vec{a}$ y que es paralela al eje OX.

2. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $A(2, 1)$ y tiene por vector de dirección $\vec{v}(1, 1)$.

3. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta r, sabiendo que pasa por el punto $A(2, 2)$ y tiene por vector director $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$, siendo $C(2, 1)$ y $D(1, 0)$.

4. Dibuja la recta r que pasa por el punto $A(1, 3)$ y cuyo vector de dirección es $\vec{v}(3, 1)$.

5. Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta r del ejercicio **4**.

Consideremos los siguientes casos:

a) Si $v_1 \neq 0$ y $v_2 \neq 0$, se tiene: $t = \dfrac{x - x_1}{v_1} = \dfrac{y - y_1}{v_2}$ [4]

La relación [4] se llama *ecuación continua de la recta.*

Los valores v_1 y v_2 se designan aquí con el nombre de *parámetros directores;* conocidos éstos, se conoce la dirección de la recta.

b) Si $v_1 = 0$ y $v_2 \neq 0$, la ecuación continua [4] no se puede escribir y de [3] resulta: $x - x_1 = 0 \Longrightarrow x = x_1$. Esta ecuación nos dice que todos los puntos de la recta tienen la misma abcisa, lo cual significa que la recta es paralela al eje YY'.

c) Análogamente, si $v_1 \neq 0$ y $v_2 = 0$, de la ecuación [3] se obtiene: $y - y_1 = 0 \Longrightarrow y = y_1$. En este caso todos los puntos de la recta tienen la misma ordenada, lo cual significa que la recta es paralela al eje XX'.

En particular la ecuación del eje XX' es $y = 0$, y la del eje YY', $x = 0$.

Ejemplo:

- Dado el punto $A(3, 1)$ y el vector $\vec{v}(2, 5)$, la ecuación continua de la recta es:

$$\frac{x - 3}{2} = \frac{y - 1}{5}$$

2.3. De la ecuación [3] se obtienen las siguientes ecuaciones equivalentes:

$$(x - x_1)v_2 = (y - y_1)v_1 \Longleftrightarrow xv_2 - x_1v_2 = yv_1 - y_1v_1$$

$$\Updownarrow$$

$$v_2x - v_1y - x_1v_2 + y_1v_1 = 0$$

Si llamamos $A = v_2$, $B = -v_1$ y $C = -x_1v_2 + y_1v_1$, queda

$$\mathbf{Ax + By + C = 0} \quad [5]$$

La relación [5] se suele llamar *ecuación general, ecuación cartesiana* o *ecuación implícita de la recta.*

Cada recta del plano afín se individualiza dando a A, B y C valores reales con la condición de que A y B no sean simultáneamente nulos. Por tanto, toda recta del plano afín tiene por ecuación algebraica una de primer grado en las indeterminadas x e y.

6. Escribe la ecuación en forma continua de la recta que pasa por $A(0, 1)$ y cuyo vector $\vec{v}$ de dirección es $(2, 5)$.

7. Halla la ecuación en forma continua de la recta que pasa por el punto $A(-1, 1)$ y tiene por vector director $\vec{v}(-1, -1)$.

8. Dibuja las rectas de ecuación:

a) $y = 3$

b) $y = -1$

c) $y = 0$

d) $y = \dfrac{1}{2}$

9. Halla la ecuación general de la recta determinada por $A(1, 5)$ y $\vec{v}(1, -1)$.

10. Halla la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(1, 7)$ y tiene por vector director el determinado por los puntos $C(2, 0)$ y $D(0, 1)$.

Ejemplos:

- Dada la recta determinada por $A(1, 3)$ y $\vec{v}(2, 5)$, sus ecuaciones son: $(x, y) = (1, 3) + t(2, 5) = (1 + 2t, 3 + 5t)$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 5t \end{cases} \quad \text{(Ecuaciones paramétricas)}$$

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 3}{5} \quad \text{(Ecuación continua)}$$

$5x - 5 = 2y - 6$; $5x - 2y + 1 = 0$ (Ecuación general)

- Dada la ecuación general $3x - 2y + 1 = 0$ de una recta r, un punto cualquiera queda determinado dando a x o a y un valor arbitrario.

Si $x = 1$, $3 - 2y + 1 = 0$, $y = 2$, $A(1, 2)$

Si $y = 0$, $3x + 1 = 0$, $x = \frac{1}{3}$, $B\left(\frac{1}{3}, 0\right)$;

2.4. Conocida la ecuación general $Ax + By + C = 0$ de una recta, para pasar a la ecuación vectorial o a las ecuaciones paramétricas se toma como vector de dirección $\vec{v}(v_1, v_2) = (-B, A)$, y $A(x_1, y_1)$ como punto de la determinación lineal, donde los números x_1, y_1 verifican la ecuación de la recta.

Ejemplo:

- En la recta $2x - 3y + 4 = 0$, el vector de dirección es:

$$(v_1, v_2) = (-B, A) = (3, 2).$$

Si hacemos $x = 0$ en la ecuación de la recta, se obtiene $y = \frac{4}{3}$.

Las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = 0 + 3t \\ y = \frac{4}{3} + 2t \end{cases}$

11. Dada la recta $r = 3x - 2y + 5 = 0$, halla dos determinaciones distintas de la misma.

12. Dada la recta r de ecuación $3x - 4y - 6 = 0$, escribe las ecuaciones continua y paramétricas de r.

13. Dibuja las rectas de ecuación

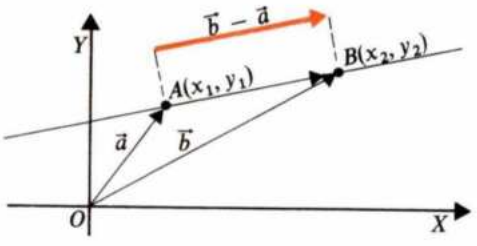
a) $x = 1$, b) $x = -1$, c) $x = -\frac{1}{2}$

3 Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

3.1. Una recta del plano afín queda determinada por dos puntos, A y B, distintos.

Este axioma de la geometría de Euclides es también una determinación lineal de la recta. En efecto: si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son los vectores de posición de los puntos A y B respectivamente (Fig. 8), entonces $\vec{b} - \vec{a}$ es un vector direccional de la recta y $(A, \vec{b} - \vec{a})$ es una determinación lineal de la recta AB.

Nos referiremos a esta determinación con el símbolo $r(A, B)$.



(Fig. 8)

3.2. La ecuación vectorial de la recta determinada por los puntos A y B es $\vec{x} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$ [6]

Se puede comprobar que para $t = 0$ se obtiene el punto A, y para $t = 1$, el punto B.

Si $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ son las coordenadas de los puntos A y B, las ecuaciones paramétricas son

$$(x\ ,\ y) = (x_1, y_1) + t[(x_2, y_2) - (x_1, y_1)] =$$
$$= (x_1, y_1) + t(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$$

Realizando las operaciones indicadas, se tiene:

$$(x, y) = (x_1 + t(x_2 - x_1),\ y_1 + t(y_2 - y_1)),$$

de donde resultan las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}$$

En forma continua la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B es

$$\frac{\mathbf{x - x_1}}{\mathbf{x_2 - x_1}} = \frac{\mathbf{y - y_1}}{\mathbf{y_2 - y_1}}, \quad \text{siempre que} \quad x_2 \neq x_1 \quad \text{e} \quad y_2 \neq y_1$$

En el caso de ser $x_2 = x_1$, o bien $y_2 = y_1$, se obtienen rectas paralelas a los ejes cuyas ecuaciones ya se vieron anteriormente.

Ejemplo:

- La ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1, -2)$ y $B(2, 0)$ es la siguiente:

$$\frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y - (-2)}{0 - (-2)} \Longrightarrow (x - 1) \cdot 2 = (y + 2) \cdot 1$$
$$2x - 2 = y + 2 \Longrightarrow 2x - y - 4 = 0$$

14. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, 1)$ y $B(1, 1)$.

15. Halla las ecuaciones continua y general de la recta que pasa por $A(0, -1)$ y $B(1, 0)$.

16. Halla la ecuación de la recta que pasa por $A(3, 0)$ y $B(0, 4)$.

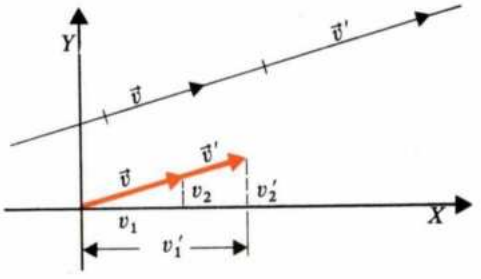
4 Pendiente de una recta

4.1. Consideremos la recta r de vector director $\vec{v}(v_1, v_2)$, donde $v_1 \neq 0$. (Fig. 9.) Se llama pendiente de la recta r al número dado por: $\mathbf{m = \frac{v_2}{v_1}}$.

Si $v_1 = 0$, la recta no tiene pendiente.

Si $\vec{v} = (2, 1)$, la pendiente es $m = \frac{1}{2}$.

Si $\vec{v} = (4, 2)$, la pendiente es $m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.



(Fig. 9)

Podemos plantearnos la siguiente cuestión:

¿Obtendríamos una pendiente diferente para la recta r eligiendo otro vector de dirección $\vec{v}'(v_1', v_2')$ distinto de (v_1, v_2)?

Si se toma $\vec{v}'$ como vector director de r, la pendiente será: $\dfrac{v_2'}{v_1'}$

Ahora bien, como $\vec{v}'$ y $\vec{v}$ son paralelos, serán proporcionales, es decir, $\vec{v}' = t\vec{v}$, entonces $(v_1', v_2') = t(v_1, v_2) = (tv_1, tv_2)$,

luego $\dfrac{v_2'}{v_1'} = \dfrac{tv_2}{tv_1} = \dfrac{v_2}{v_1} = m$, este resultado nos dice que:

La pendiente m de una recta r no depende del vector director elegido para definirla.

Todas las rectas que tienen la misma dirección tienen la misma pendiente, ya que sus vectores de dirección son proporcionales.

Un vector director del eje XX' es $\vec{u}_1(1, 0)$, por lo tanto la pendiente del eje XX' es $m = \dfrac{0}{1} = 0$.

Como los vectores de dirección del eje YY' o de cualquier recta paralela a él son de la forma $(0, h)$, resulta que la recta YY' y sus paralelas no tienen pendiente, ya que $\dfrac{h}{0}$ no tiene sentido.

4.2. La ecuación general de la recta $Ax + By + C = 0$ tiene por vector director $\vec{v}(-B, A)$. Si $B \neq 0$, su pendiente será:

$$m = -\frac{A}{B},$$

Así, en la recta r de ecuación $3x - 2y + 1 = 0$, su vector director es $\vec{v}(-B, A) = (2, 3)$ y su pendiente $m = \dfrac{3}{2}$.

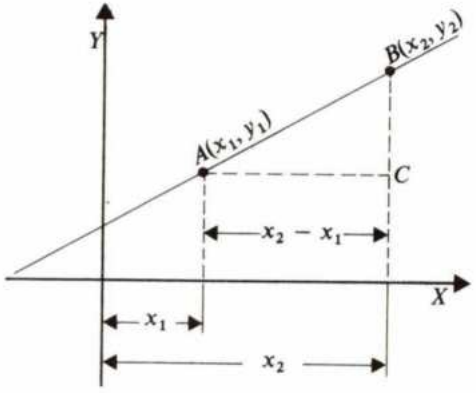
4.3. La pendiente de una recta r (Fig. 10) que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es:

$$m = \frac{CB}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \text{si} \quad x_2 - x_1 \neq 0$$

En efecto: un vector director de r (Fig. 10) es $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ y sus componentes $(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (v_1, v_2)$.

Como $m = \dfrac{v_2}{v_1}$, resulta:

$$m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ siempre que } x_2 - x_1 \neq 0$$



(Fig. 10)

17. Halla la pendiente de la recta

$$\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}_1, \vec{u}_1 = (1, 0)$$

18. Halla la pendiente de la recta

$$\vec{x} = \vec{a} + t(\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2)$$

Ejemplos:

- La pendiente de la recta que pasa por $A(2, 1)$, $B(4, 7)$ es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 1}{4 - 2} = \frac{6}{2} = 3$$

- La recta que pasa por los puntos $A(1, 2)$ y $B(1, 7)$ no tiene pendiente, ya que

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 2}{1 - 1} = \frac{5}{0}$$

y la división por 0 no está definida.

4.4. La ecuación de la recta en forma continua $\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2}$ se puede escribir del modo siguiente:

$$y - y_1 = \frac{v_2}{v_1}(x - x_1), \quad \text{y como} \quad m = \frac{v_2}{v_1}, \quad \text{queda}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad [7]$$

La ecuación [7] recibe el nombre de *ecuación de la recta en la forma punto-pendiente*. Esta ecuación nos dice que una recta queda determinada cuando se conoce un punto de ella y su pendiente.

Ejemplos:

- La ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1, 2)$ y tiene por pendiente 2 es: $y - 2 = 2(x - 1)$; su ecuación general es: $2x - y = 0$.
- La ecuación de la recta r que pasa por los puntos $A(2, 1)$ y $B(4, 7)$ es:

$$y - 1 = \frac{7 - 1}{4 - 2}(x - 2), \quad \text{es decir,} \quad y - 1 = 3(x - 2),$$

ya que según lo dicho en el apartado **4.3.** la pendiente de esta recta es:

$$m = \frac{7 - 1}{4 - 2} = 3$$

4.5. En el apartado **3.2.** de este tema se vio que la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ siempre que $x_2 \neq x_1$ e $y_2 \neq y_1$; esta ecuación se puede escribir en la forma punto-pendiente así:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Longrightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{donde}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

19. Halla la pendiente de la recta

$$2x + y + 1 = 0$$

20. Halla la pendiente de la recta $y = 3x + 2$.

21. Halla las pendientes de las rectas que pasan por los puntos:

a) $(1, -1)$ y $(2, 1)$

b) $(-3, 4)$ y $(7, 3)$

c) $(8, 5)$ y $(-7, -1)$

22. Halla la ecuación de las rectas siguientes:

a) que pasa por $(0, 0)$ y $(8, 1)$,

b) que pasa por $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ y $(0, 1)$,

c) que pasa por $(-1, -1)$ y $(-3, -5)$.

23. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, 1)$ y tiene por pendiente la misma que la de la recta que pasa por los puntos $A(1, 1)$ y $B(2, 0)$.

24. Halla las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices $A(1, 1)$, $B(3, 5)$ y $C(-1, 5)$.

5 Ecuación explícita de la recta

La ecuación punto-pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$ es equivalente a la ecuación $y = mx - mx_1 + y_1$; haciendo $b = -mx_1 + y_1$, resulta: $y = mx + b$ [8].

La ecuación [8] se llama *ecuación explícita de la recta*, donde m es la pendiente de la recta y b la ordenada en el origen, es decir, la ordenada del punto de la recta cuya abscisa es $x = 0$.

Ejemplo:

- Si $r = 3x - 2y + 1 = 0$, su ecuación explícita es:

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}; \quad m = \frac{3}{2}; \quad b = \frac{1}{2}$$

Si en la ecuación $r \equiv Ax + By + C = 0$ es $B \neq 0$, su ecuación explícita es: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} = mx + b$, donde $m = -\frac{A}{B}$ y $b = -\frac{C}{B}$

Conviene recordar que:

La pendiente de una recta es el coeficiente de la x cuando se ha despejado la y en su ecuación.

Si $B = 0$, entonces la recta r es paralela al eje OY, y en este caso la recta no tiene ordenada en el origen.

25. Halla la ecuación en forma explícita de la recta que pase por los puntos $A(1, -1)$ y $B(0, 1)$.

26. La ecuación de una recta r es $y = 3x + 2$. Halla la ecuación de otra que tiene por pendiente la misma que la de r y pasa por el punto $A(1, 0)$. Dibuja ambas rectas. ¿Cómo son?

27. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(5, -7)$ y cuya pendiente es la de la recta $2x - 3y + 8 = 0$?

6 Ecuación segmentaria de la recta

Una recta r no paralela a ninguno de los dos ejes y que no pasa por el origen corta a los ejes en dos puntos:

$A(a, 0)$ del eje XX' y $B(0, b)$ del eje YY' (Fig. 11).

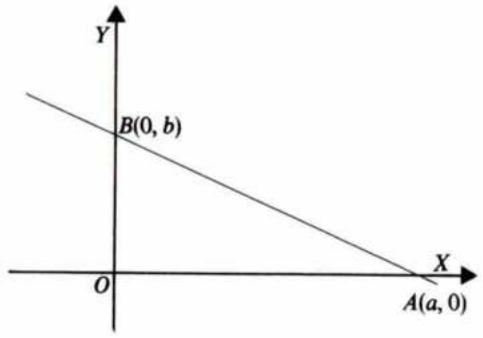
Vamos a obtener la ecuación de esta recta en función de los segmentos a y b; para ello aplicamos la ecuación punto-pendiente:

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a) \Rightarrow y = -\frac{b}{a}(x - a) \Rightarrow ay = -bx + ab$$

$bx + ay = ab$ y dividiendo por $ab \neq 0$, resulta:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad [9]$$

La relación [9] se llama *ecuación segmentaria de la recta.* Los segmentos a y b se denominan respectivamente la *abscisa en el origen* y la *ordenada en el origen.*

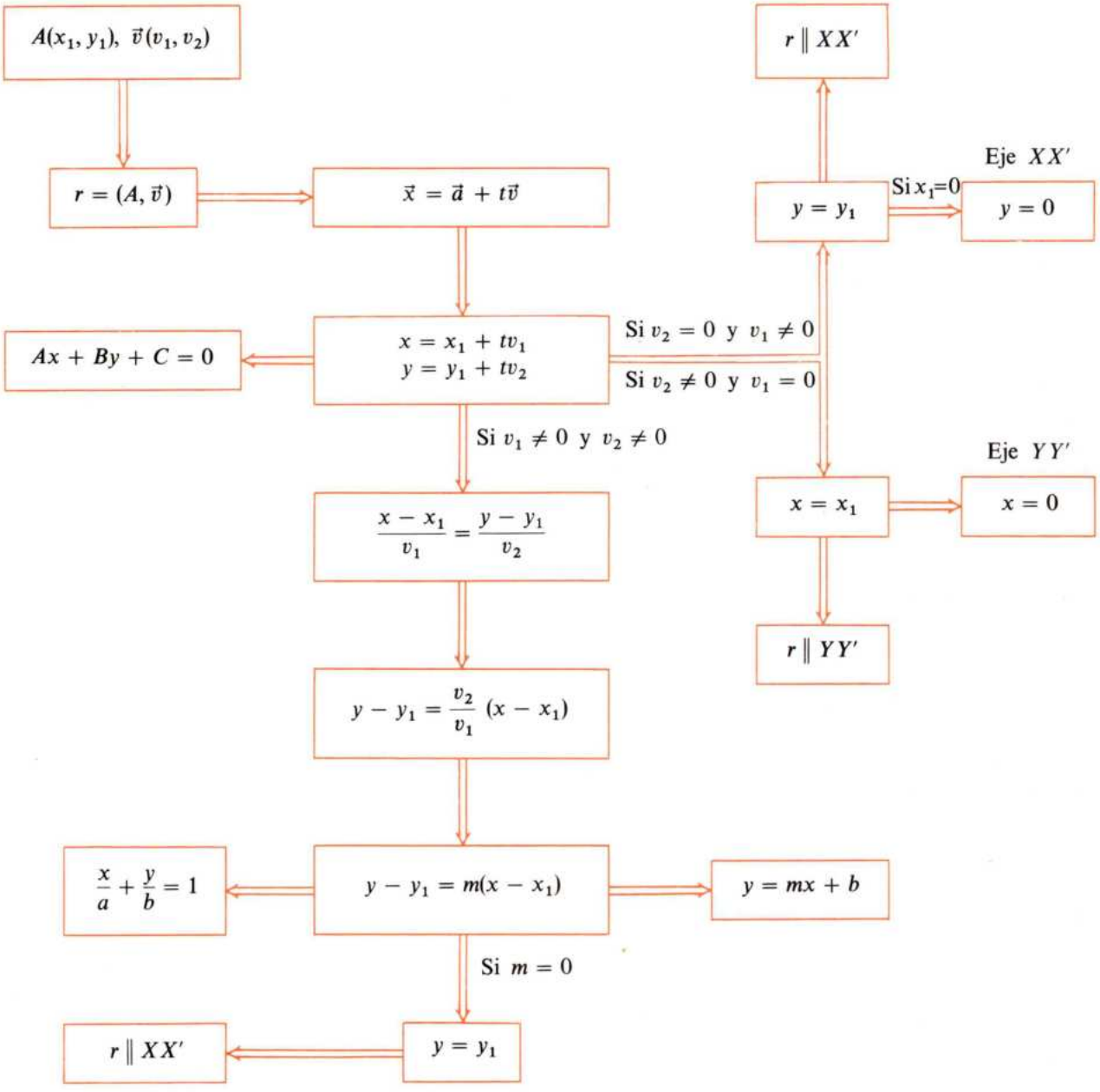


(Fig. 11)

28. Halla la ecuación segmentaria de la recta que pasa por los puntos $A(-2, 0)$ y $B(0, 3)$.

7 Esquema de las ecuaciones de la recta

En el siguiente esquema se resume el proceso seguido en la obtención de las distintas ecuaciones de la recta.



8 Incidencia de puntos y rectas

8.1. Se dice que un punto P es incidente con una recta r, o que la recta pasa por P, cuando $P \in r$.

Si $P(x_1, y_1)$ es incidente con la recta $r \equiv Ax + By + C = 0$, las coordenadas del punto satisfacen la ecuación de la recta.

$$P \in r \Longleftrightarrow Ax_1 + By_1 + C = 0$$

Ejemplos:

- El punto $P(1, 2)$ está en la recta $3x - 2y + 1 = 0$, ya que sus coordenadas verifican la ecuación $3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 1 = 0$.
- El punto $P(1, 3)$ no está en la recta $r \equiv 3x - 2y + 1 = 0$, ya que $3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 1 \neq 0$.
- El punto $P(0, 1)$ satisface la ecuación de la recta $r \equiv y = 2x + 1$, luego $P \in r$.

Si conocemos la ecuación de una recta r y la abscisa de un punto $P \in r$, se puede calcular su ordenada, y recíprocamente.

Ejemplos:

- En la recta $y = 2x - 1$ vamos a hallar el punto $P(x, y)$ de abscisa $x = 2$.

  Basta sustituir en la ecuación:

  $$y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

  El punto P es $(x, y) = (2, 3)$.

- En la recta de ecuación $3x - 2y + 1 = 0$, ¿cuál es el punto cuya ordenada es $y = 1$?

  El punto $(x, 1)$ en cuestión debe satisfacer la ecuación de la recta, luego

  $$3x - 2 \cdot 1 + 1 = 0 \Longrightarrow 3x = 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

  El punto pedido es: $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

29. Dada la recta r de ecuación $y = 2x - 5$, di cuáles de los siguientes puntos son incidentes con r:

a) $A(1, 1)$

b) $B(3, 1)$

c) $C(5, 5)$

d) $D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

30. Determina el valor de k de modo que:

a) el punto $(-1, 4)$ pertenezca a la recta $3kx - 5y + 1 = 0$;

b) $2x - ky + 1 = 0$ pase por el punto $(1, 1)$;

c) $2kx + ky + k = 0$ pase por el punto $(1, 0)$.

31. Halla los puntos de la recta $2x - 3y = 6$ incidentes con los ejes.

32. Halla la ordenada del punto P de abscisa $x = 1$ sabiendo que P pertenece a la recta de ecuación $y = 2x - 1$.

8.2. Tres puntos, A, B y C, que son incidentes con la misma recta r se dice que están alineados. (Fig. 12)

Si los puntos A, B y C están alineados, los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$ tienen la misma dirección, por tanto se ha de verificar:

$$\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AC} = q\overrightarrow{BC}$$

En la práctica usaremos el siguiente criterio: *Tres puntos, A, B y C, están alineados si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son proporcionales.*

(Fig. 12)

Ejemplos:

- ¿Están alineados los puntos $A(2, 5)$, $B(5, 6)$ y $C(8, 7)$?

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (5, 6) - (2, 5) = (3, 1)$$
$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = (8, 7) - (2, 5) = (6, 2)$$

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son proporcionales, ya que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$, y como tienen el mismo origen, los puntos A, B y C están alineados.

Otro modo de proceder es el siguiente:

La ecuación de la recta determinada por A y B es $\dfrac{x-2}{5-2} = \dfrac{y-5}{6-5}$ [1]. Para que el punto C esté alineado con A y B, las coordenadas de C deben satisfacer la ecuación [1]. En este caso A, B y C están alineados, ya que

$$\frac{8-2}{5-2} = \frac{7-5}{6-5}, \text{ es decir: } \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$$

- Los puntos $A(0, 0)$, $B(1, 1)$ y $C(2, 1)$ no están alineados, ya que $\overrightarrow{AB} = (1, 1)$ y $\overrightarrow{AC} = (2, 1)$ no son proporcionales, pues no existe ningún número real para el cual se verifique la relación $(1, 1) = k(2, 1)$.

8.3. Un conjunto de puntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ del plano afín están alineados si son incidentes con una misma recta (Fig. 13).

Si los puntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ están alineados, entonces los vectores $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}, \ldots, \overrightarrow{A_1A_{n-1}}$, $\overrightarrow{A_1A_n}$ tienen la misma dirección, es decir, son proporcionales.

(Fig. 13)

Ejemplo:

- Los puntos $A_1(1, 1)$, $A_2(2, 2)$, $A_3(3, 3), \ldots, A_{n-1}(-7, -7)$, $A_n(12, 12)$ están alineados, ya que $\overrightarrow{A_1A_2} = (1, 1)$, $\overrightarrow{A_1A_3} = (2, 2), \ldots, \overrightarrow{A_1A_{n-1}} = (-8, -8)$, $\overrightarrow{A_1A_n} = (11, 11)$ son proporcionales.

33. Calculando las pendientes m_{AB} y m_{BC} de las rectas AB y BC respectivamente, averigua si los puntos $A(2, 1)$, $B(5, 4)$ y $C(-5, -6)$ están alineados.

34. Halla el valor de k para que los puntos $A(1, 1)$, $B(0, 0)$, $C(2, k)$ estén alineados.

35. Comprueba si los puntos $A(1, 2)$, $B(3, 6)$, $C(5, 10)$, $D(7, 14)$ y $E(8, 16)$ están o no alineados.

9 Incidencia de rectas

9.1. Si dos rectas, r y s, del plano afín son secantes, su intersección es un punto.

$$r \text{ y } s \text{ secantes} \Longleftrightarrow r \cap s = \{P\}$$

Esta condición se expresa analíticamente así:

Las rectas $r \equiv Ax + By + C = 0$ y $s \equiv A'x + B'y + C' = 0$ son secantes si existe un único punto $P(x_1, y_1)$ tal que

$$Ax_1 + By_1 + C = 0 \quad \text{y} \quad A'x_1 + B'y_1 + C' = 0,$$

es decir, el punto $P(x_1, y_1)$ satisface las ecuaciones de las rectas r y s, y por tanto P se puede obtener resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones.

Ejemplo:

- Las rectas $r \equiv 2x - 2y - 6 = 0$ y $s \equiv 3x - 8y + 1 = 0$ son secantes, y el punto común es $P(5, 2)$. (Compruébelo el alumno.)

9.2. Vamos a establecer en forma general la condición para que dos rectas sean secantes.

Las rectas: $\left.\begin{array}{l} r \equiv Ax + By + C = 0 \\ s \equiv A'x + B'y + C' = 0 \end{array}\right\}$ [1]

son secantes cuando $\mathbf{AB' \neq A'B}$

En el siguiente esquema aparece la resolución del sistema [1]

Cálculo de x

$Ax + By + C = 0$ $\quad$ $A'x + B'y + C' = 0$

$\downarrow \cdot B'$ $\quad$ $\downarrow \cdot B$

$AB'x + BB'y + CB' = 0$ $\quad$ $A'Bx + B'By + C'B = 0$

Diferencia

$(AB' - A'B)x + (CB' - C'B) = 0$

$$x = \frac{BC' - B'C}{AB' - A'B}$$

Cálculo de y

$Ax + By + C = 0$ $\quad$ $A'x + B'y + C' = 0$

$\downarrow \cdot A'$ $\quad$ $\downarrow \cdot A$

$A'Ax + A'By + A'C = 0$ $\quad$ $A'Ax + AB'y + AC' = 0$

Diferencia

$(AB' - A'B)y + (AC' - A'C) = 0$

$$y = \frac{A'C - AC'}{AB' - A'B}$$

Este sistema es compatible si y sólo si el denominador $AB' - A'B \neq 0$, en este caso la solución es única y las rectas r y s tienen un solo punto común.

Se tienen las siguientes equivalencias:

$$AB' - A'B \neq 0 \Longleftrightarrow AB' \neq A'B$$

Ejemplo:

- Las rectas $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 5x - y = -1 \end{cases}$

  son secantes, ya que $AB' \neq A'B \Longleftrightarrow 3(-1) \neq 5(-2)$

Si $AB' - A'B = 0$, entonces no se puede afirmar nada, puesto que las fracciones que resultan al resolver el sistema [1] carecen de sentido por ser el denominador cero.

9.3. Sea P un punto cualquiera del plano afín.
Se llama haz de rectas de vértice P al conjunto de rectas del plano incidentes con P (Fig. 14).

Las rectas del haz tienen todas un punto común $P(x_0, y_0)$, por tanto lo único que varía es la pendiente. El conjunto de las rectas del haz de vértice $P(x_0, y_0)$ es:

$$\{y - y_0 = m(x - x_0),\ m \in \mathbb{R}\} \cup \{x = x_0\}$$

donde $x = x_0$ es una recta paralela al eje YY'.

El conjunto de las rectas del haz de vértice el punto $P(1, 3)$ es:

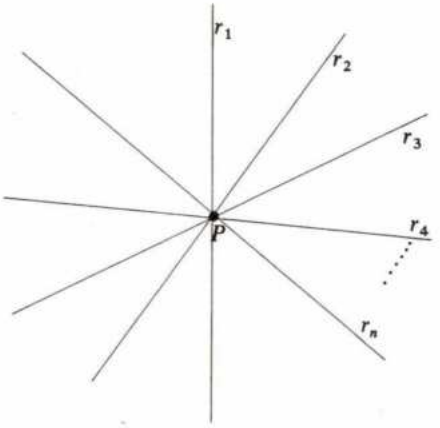
$$\{y - 3 = m(x - 1),\ m \in \mathbb{R}\} \cup \{x = 1\}$$

Ejemplos:

- El sistema formado por las rectas $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 3x + y - 7 = 0 \end{cases}$ tiene por solución el punto $P(2, 1)$, por consiguiente las dos rectas pertenecen a un haz de vértice P.

  El conjunto de las rectas del haz es:

  $$\{y - 1 = m(x - 2),\ m \in \mathbb{R}\} \cup \{x = 2\}$$



(Fig. 14)

36. Halla el punto de intersección de las rectas

$$y - x + 1 = 0$$
$$2x + 3y + 7 = 0$$

37. Halla m de modo que las rectas

$$y - x + 3 = 0$$
$$3y + mx - 1 = 0$$

no sean secantes.

Tratemos de hallar la ecuación en la recta de este haz que pasa por el punto $Q(3, 2)$. Sustituyendo en $y - 1 = m(x - 2)$, se tiene: $2 - 1 = m(3 - 2)$, $m = 1$; luego la ecuación de la recta pedida es $y - 1 = 1(x - 2) \Longleftrightarrow x - y - 1 = 0$.

- El haz de rectas que pasan por el origen es:

$$\{y = mx,\ m \in \mathbb{R}\} \cup \{x = 0\}$$

9.4. Se puede probar que, conocidas las coordenadas $P(x_0, y_0)$, el haz de rectas de vértice P viene dado por la ecuación $\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0$, donde α y β son dos parámetros variables que toman valores reales, no simultáneamente nulos. Al variar α y β, se obtienen distintas ecuaciones que representan otras tantas rectas y todas ellas pasan por el punto P, ya que sus coordenadas verifican la ecuación

$$\alpha(x_0 - x_0) + \beta(y_0 - y_0) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

Ejemplo:

- La ecuación del haz de rectas que tiene por vértice el punto $P(2, 5)$ es:

$$\alpha(x - 2) + \beta(y - 5) = 0 \qquad [2]$$

La ecuación de la recta del haz que pasa por el punto $(3, 2)$ se obtiene del modo siguiente:

$$\alpha(3 - 2) + \beta(2 - 5) = 0$$

$$\alpha - 3\beta = 0 \Longrightarrow \alpha = 3\beta$$

sustituyendo en [2], se tiene:

$$3\beta(x - 2) + \beta(y - 5) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 3x - 6 + y - 5 = 0 \Longleftrightarrow 3x + y - 11 = 0$$

9.5. Si las rectas $r \equiv Ax + By + C = 0$ y $s \equiv A'x + B'y + C' = 0$ se cortan en un punto P, se puede probar que el haz de rectas de vértice P viene dado por

$$\alpha(Ax + By + C) + \beta(A'x + B'y + C') = 0,$$

donde α y β son dos parámetros variables que pueden tomar todos los valores reales.

Todas las rectas que se obtienen al variar α y β pasan por el punto $P(x_0, y_0)$, pues sus coordenadas verifican la ecuación y se tiene: $\alpha(Ax_0 + By_0 + C) + \beta(A'x_0 + B'y_0 + C') = 0$, es decir:

$$\alpha 0 + \beta 0 = 0$$

38. Halla el vértice del haz determinado por las rectas

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ \dfrac{1}{2}x + 3y + 7 = 0 \end{cases}$$

Ejemplo:

- El haz determinado por las rectas $r \equiv 2x - y - 3 = 0$ y $s \equiv 3x + y - 7 = 0$ viene dado por

$$\alpha(2x - y - 3) + \beta(3x + y - 7) = 0 \quad [1]$$

Vamos a hallar la ecuación de la recta del haz que pasa por el punto $Q(3, 2)$. Sustituyendo en [1] las coordenadas de Q, se tiene:

$$\alpha(6 - 2 - 3) + \beta(9 + 2 - 7) = 0$$
$$\alpha + 4\beta = 0 \Longrightarrow \alpha = -4\beta$$

Sustituyendo en [1] el valor de α encontrado, se obtienen sucesivamente:

$$-4\beta(2x - y - 3) + \beta(3x + y - 7) = 0$$
$$-4(2x - y - 3) + (3x + y - 7) = 0$$
$$-8x + 4y + 12 + 3x + y - 7 = 0$$
$$-5x + 5y + 5 = 0 \Longrightarrow x - y - 1 = 0$$

Este es otro método para resolver el problema planteado en el primer ejemplo del apartado **9.3.** Se observa que usando este método no hay que hallar el punto de intersección, como se hizo allí, y por consiguiente no hay que resolver el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas dadas.

10 Paralelismo de rectas

10.1. Sabemos que dos rectas del plano afín son paralelas o tienen la misma dirección cuando $r \cap s = \varnothing$ o r es coincidente con s, es decir: cuando no se cortan o cuando coinciden.

10.2. Sean r y s dos rectas paralelas y $r(A, \vec{v})$, $s(B, \vec{w})$ determinaciones lineales de r y s, respectivamente; entonces

$$r \parallel s \Longleftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{w} \Longleftrightarrow \vec{w} = t\vec{v} \Longleftrightarrow (w_1, w_2) = t(v_1, v_2)$$

Si $\vec{w}(w_1, w_2)$ y $\vec{v}(v_1, v_2)$ son las componentes de los vectores $\vec{w}$ y $\vec{v}$ respectivamente, se tiene que

$$m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{tv_2}{tv_1} = \frac{w_2}{w_1} = m',$$

siempre que tengan sentido los cocientes anteriores; m y m' son las pendientes de r y s respectivamente.

Luego $m = m' \Longrightarrow r \parallel s$, que se expresa diciendo:

Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente.

Ejemplos:

- Las rectas $y = 3x - 2$, $y = 3x + 7$ son paralelas, ya que tienen la misma pendiente, $m = m' = 3$.
- Las rectas $3x - 2y = 1$ y $6x - 4y = 7$ tienen por pendientes respectivas $m = \frac{3}{2}$, $m' = \frac{6}{4}$, luego son paralelas.

10.3. Dadas las rectas

$$r \equiv Ax + By + C = 0 \quad \text{y} \quad s \equiv A'x + B'y + C' = 0,$$

donde suponemos todos los coeficientes distintos de cero, se tiene:

$$\mathbf{r \,||\, s} \Longleftrightarrow \mathbf{\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}}$$

La pendiente de r es $m = -\frac{A}{B}$.

La pendiente de s es $m' = -\frac{A'}{B'}$.

Luego $r \,||\, s \Longleftrightarrow m = m' \Longleftrightarrow -\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'} \Longleftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$.

De aquí obtenemos nuevamente el resultado ya conocido: dos rectas son secantes (no paralelas) si

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$$

Ejemplo:

- Las rectas $2x + 4y = 1$ y $3x + 6y = -1$ son paralelas, ya que $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.

  Si calculamos las pendientes, se tiene:

  $$m = -\frac{2}{4} \quad \text{y} \quad m' = -\frac{3}{6},$$

  que son iguales, y en consecuencia las rectas son paralelas.

10.4. Se ha visto que la condición de paralelismo de dos rectas en forma general es $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$.

Si además:

a) $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$, las rectas son paralelas y distintas.

b) $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$, las rectas son paralelas e iguales o coincidentes.

39. Comprueba si las siguientes rectas son o no paralelas:

$$\begin{cases} 3x - 7y + 8 = 0 \\ 6x - 14y + 5 = 0 \end{cases}$$

40. Halla k de modo que las rectas $3x - 2y = 5$, $x - ky = 7$ sean paralelas.

41. Halla m y n de modo que las siguientes rectas sean paralelas:

$$\begin{cases} mx + 2y = 6 \\ nx + y = 9 \end{cases}$$

Sabemos que la segunda pasa por el punto $(18, 0)$.

Veamos en primer lugar el caso b): Sea k ia constante de proporcionalidad, es decir,

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = k$$

de donde $A = kA'$, $B = kB'$, $C = kC'$. Entonces las ecuaciones de las rectas se escriben así:

$$\begin{cases} kA'x + kB'y + kC' = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$

y es evidente que tienen las mismas soluciones, pues dividiendo por k se obtienen ecuaciones iguales. Las rectas que representan coinciden.

En caso de cumplirse la condición a), las rectas son paralelas y distintas.

10.5. Las condiciones del paralelismo de rectas se pueden expresar como se indica en el siguiente esquema:

42. ¿Son paralelas las rectas $r \equiv Ax + C = 0$ y $r' \equiv A'x + C' = 0$?

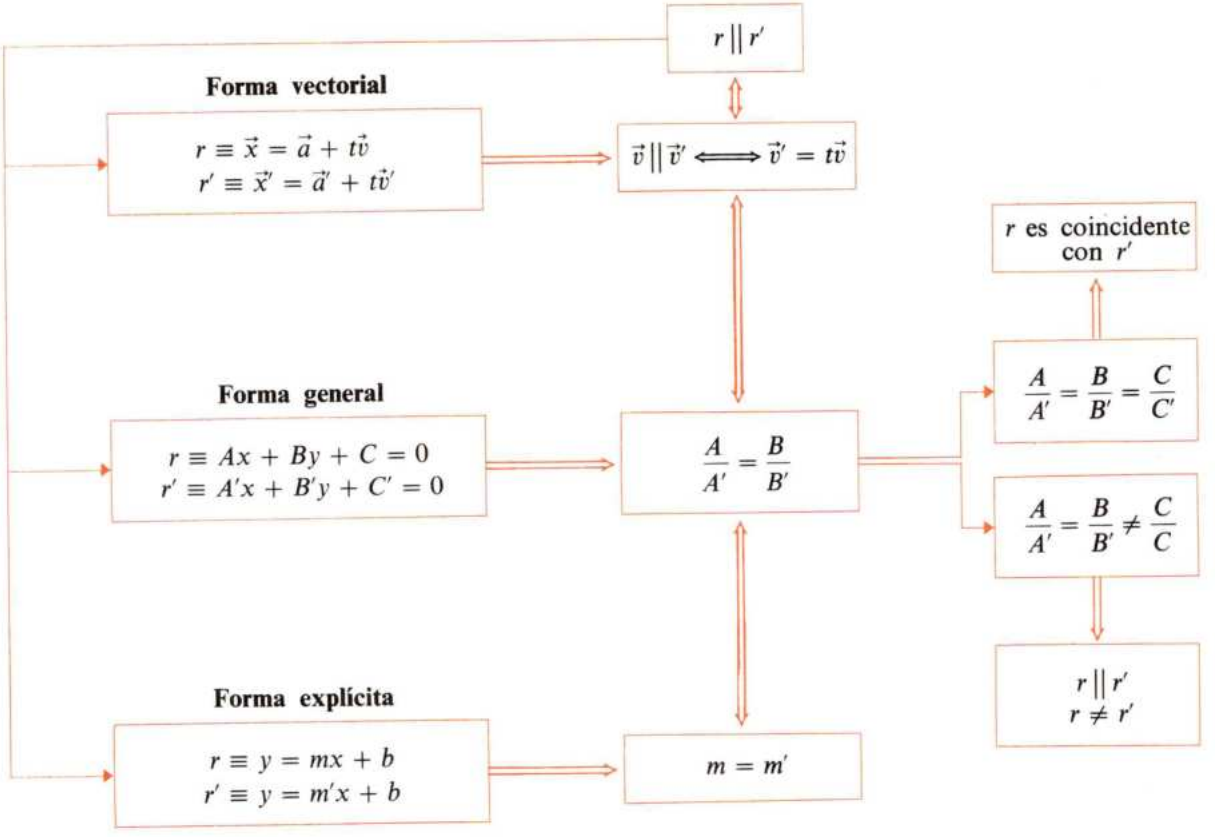
¿Tienen ordenada en el origen las rectas anteriores?

¿Cuál es la condición para que r y r' sean coincidentes?

43. ¿Son paralelas las rectas $s \equiv By + C = 0$ y $s' \equiv B'y + C' = 0$?

¿Cuál es la condición para que s y s' sean coincidentes?

P A R A L E L I S M O



11 Recta paralela a otra por un punto. Haz de rectas paralelas

11.1. Sean A un punto del plano afín y r una recta; *existe una recta s, y solamente una, que pasa por A y que es paralela a r.*

La pendiente m' de s es la misma que la pendiente m de r.

Sean $A(x_1, y_1)$ el punto y $r \equiv Ax + By + C = 0$. La recta s tiene por pendiente $m' = m = -\frac{A}{B}$.

Aplicando la ecuación punto-pendiente se tiene:

$$y - y_1 = -\frac{A}{B}(x - x_1) \iff By - By_1 = -Ax + Ax_1$$

$$\Updownarrow$$

$$By + Ax - By_1 - Ax_1 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$Ax + Bx + k = 0$$

Siendo $k = -By_1 - Ax_1$

Ejemplos:

- La recta paralela a $r = 3x - 2y + 1 = 0$ por el punto $A(2, 1)$ es:

  $y - 1 = \frac{3}{2}(x - 2)$, ya que la pendiente de r es $m = -\frac{A}{B} = \frac{3}{2}$.

- La ecuación de la recta paralela a la recta de ecuación $x - y = 0$ por el punto $(3, -5)$ es $y + 5 = 1(x - 3)$, ya que $m = 1$

11.2. *Se llama haz de rectas paralelas a una recta dada r al conjunto de rectas paralelas a r.*

Si la ecuación de la recta r es: $r \equiv Ax + By = 0$, las ecuaciones de las rectas del haz son de la forma $Ax + By + k = 0$, siendo k una constante arbitraria.

Para cada valor de k se obtiene la ecuación de una recta del haz.

Ejemplo:

- La ecuación del haz paralelo a $3x - 2y + 6 = 0$ es $3x - 2y + k = 0$.

  Si una recta del haz pasa por el punto $A(1, 0)$, el valor de $k = -3$ y su ecuación es $3x - 2y - 3 = 0$.

44. Halla la ecuación de la paralela a la recta $3x - 5y - 7 = 0$ por el punto $A(1, -1)$.

45. Un paralelogramo tiene un vértice en el punto $A(3, 2)$, y dos de sus lados son rectas dadas por $3x + 3y = 7$, $3y - x = 4$.

Se pide:

a) ecuaciones de los otros dos lados,

b) las coordenadas de los vértices.

Ejercicios y cuestiones

46. Determina las coordenadas de los vértices del triángulo cuyos lados están en las rectas

$$3x - y - 4 = 0$$
$$3x - 4y + 11 = 0$$
$$3x + 2y - 1 = 0$$

47. Calcula el punto de intersección de las rectas cuyas ecuaciones paramétricas son

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 3 + t \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 7 + 2t \end{cases}$$

48. Determina el valor de m para que las rectas siguientes sean concurrentes:

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ 2x + 3y - 1 = 0 \\ (m + 2)x + (2m - 1)y + m + 1 = 0 \end{cases}$$

Indicación: resuelve el sistema formado por las dos primeras y calcula m con la condición de que el punto obtenido sea incidente con la tercera recta.

49. Sea un paralelogramo $ABCD$: $A(2, 3)$, $B(5, 1)$, $C(4, 0)$.

Halla las coordenadas del vértice D.

50. Se tiene el cuadrilátero $ABCD$ cuyos vértices tienen las siguientes coordenadas:

$$A(0, -8),\ B(6, 0),\ C(-2, 3),\ D(-6, -1)$$

Halla las coordenadas de los puntos medios de sus lados y comprueba que éstos son vértices de un paralelogramo.

51. Si m y m' son las pendientes de dos rectas, ¿qué relación hay entre m y m' si dichas rectas son paralelas?

52. Una recta r pasa por el punto $M(2, 5)$ y corta los ejes según segmentos iguales. Halla la ecuación de dicha recta.

53. Dos lados de un paralelogramo tienen por ecuaciones $y = 2x$, $2y = x$; sabiendo que el centro del paralelogramo es el punto $M(2, 3)$, determina las coordenadas de sus vértices.

54. Escribe la ecuación de la recta que pertenece al haz cuyo vértice es el punto $P(3, 1)$ y que es paralela a la recta $2x - y = 1$.

55. Conocidos los vértices de un triángulo, ¿cómo hallas la ecuación de sus medianas? Justifica la respuesta y aplícala al siguiente ejemplo:

$$A(0, 1); \quad B(1, 0); \quad C(0, 0)$$

56. Dadas las rectas de ecuaciones

$$\begin{cases} mx + (2m - 1)y + 3 = 0 \\ (4m - 7)x - (m + 2)y - 8 = 0, \end{cases}$$

determina m para que dichas rectas sean paralelas. Halla su pendiente. ¿Pueden coincidir estas rectas? ¿Por qué?

Tema 6 INTRODUCCION AL ESPACIO AFIN

En este tema se hace un estudio del espacio afín paralelo al realizado en el plano. En primer lugar se estudian los vectores libres del espacio y su estructura. Después de definir el espacio afín, se estudian algunas figuras sencillas del espacio.

1 Vectores libres en el espacio

1.1. Se llama *vector fijo* en el espacio ordinario **E** a un segmento $\overline{AB}$ cuyos extremos se dan en un cierto orden.

Si los puntos A y B coinciden, diremos que determinan un *vector fijo nulo*, es decir: $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \overrightarrow{CC}, \ldots$ son vectores fijos nulos.

1.2. Las definiciones de módulo y dirección de un vector fijo son análogas a las dadas para vectores del plano.

Dos vectores fijos, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, no nulos y no pertenecientes a la misma recta tienen el mismo sentido cuando las rectas AB y CD son paralelas y $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen el mismo sentido en el plano que determinan dichas rectas.

1.3. Sea V el conjunto de los vectores fijos del espacio **E**. En este conjunto se define una relación, llamada de equipolencia, de la siguiente forma:

Dos vectores fijos no nulos, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, son equipolentes, y se escribe $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, cuando tienen el mismo módulo, dirección y sentido, es decir:

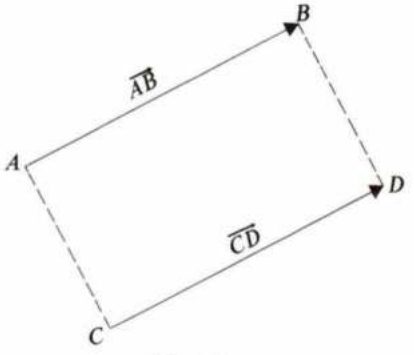
$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow \begin{cases} |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \\ \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD} \end{cases}$$

Se admite que todos los vectores fijos nulos $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \overrightarrow{CC}, \ldots$ son equipolentes, es decir, $\overrightarrow{AA} \sim \overrightarrow{BB} \sim \overrightarrow{CC} \ldots$

Como en el plano, la equipolencia de vectores fijos es una relación de equivalencia en V.

1.4. Dos vectores fijos, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, no nulos y no pertenecientes a una misma recta son equipolentes si y sólo si la figura $ABDC$ es un paralelogramo (Fig. 1).

La demostración es análoga a la realizada en el plano (Tema 3, apartado **2.3.**)



(Fig. 1)

Ejercicios:

1. Se consideran los ocho vértices de un ortoedro.

Se pide:

a) ¿Cuántos vectores no nulos forman?
b) ¿Cuántos nulos?
c) ¿Cuáles tienen la misma dirección?
d) ¿Cuáles tienen el mismo módulo?

1.5. A las clases de equivalencia del conjunto cociente $V/\sim$ se les llama vectores libres.

Dicho cociente $V/\sim$ se llama espacio de los vectores libres, y se designará por $\mathbf{V}^3$.

El vector libre formado por todos los vectores fijos nulos es el *vector cero*.

1.6. Si $\vec{x}$ es un vector libre de $\mathbf{V}^3$ y O un punto arbitrario del espacio **E**, existe un único representante de $\vec{x}$ con origen en O.

La demostración es la misma que la dada en el apartado **3.4.** del tema 3.

2. En el conjunto F de los vectores fijos determinados por las aristas de un cubo se pide:

a) ¿Cuántos módulos hay?

b) ¿Cuántas direcciones?

c) ¿Cuántos sentidos?

Razona tu contestación haciendo una representación del cubo.

3. Sea F el conjunto de vectores determinados por las aristas de un cubo.
Halla el conjunto cociente $F/\sim$.

2 El espacio vectorial $(\mathbf{V}^3, +, \cdot\, \mathbb{R})$

La adición de vectores libres de $\mathbf{V}^3$ se define del mismo modo que en el plano; con dicha adición el par $(\mathbf{V}^3, +)$ es un grupo abeliano.

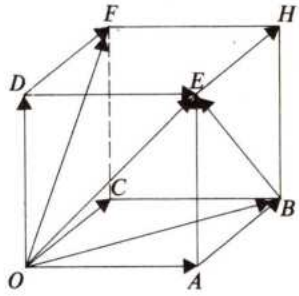
La diferencia de vectores libres de $\mathbf{V}^3$ se define del mismo modo que en el plano. Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores libres de $\mathbf{V}^3$, entonces:

$$\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}} + (-\vec{\mathbf{b}})$$

Análogamente, el producto de un vector libre por un número real se define como en el plano, y tiene las mismas propiedades que las estudiadas en el apartado **8** del tema 3.

En consecuencia, el espacio de los vectores libres $\mathbf{V}^3$ con las operaciones suma de vectores y producto de un vector por un número real es un *espacio vectorial real*.

4. La figura siguiente es un cubo. En él se han representado algunos vectores.



Escribe las posibles relaciones de suma entre las ternas de vectores que consideres.

3 Bases y coordenadas

3.1. Dado un vector fijo no nulo $\vec{a}$, se llama recta vectorial al conjunto

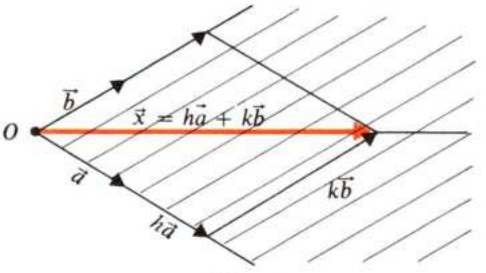
$$\mathbf{D}_{\vec{a}} = \{\vec{\mathbf{x}} \mid \vec{\mathbf{x}} = \mathbf{k}\vec{\mathbf{a}},\ \mathbf{k} \in \mathbb{R}\} \quad \text{(Fig. 2)}$$

Se dice que $D_{\vec{a}}$ es la recta vectorial determinada por $\vec{a}$.

(Fig. 2)

3.2. Dados dos vectores fijos, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, no nulos y no pertenecientes a la misma recta vectorial, se llama *plano vectorial* al conjunto

$$\pi_{\vec{a}\vec{b}} = \{\vec{x} \mid \vec{x} = \mathbf{h}\vec{a} + \mathbf{k}\vec{b}, \mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}\} \quad \text{(Fig. 3)}$$



(Fig. 3)

3.3. Vamos a ver que tres vectores libres, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, no nulos y no situados en el mismo plano forman una base en $\mathbf{V}^3$.

Para ello hay que ver que son linealmente independientes y que todo vector de $\mathbf{V}^3$ se puede expresar como combinación lineal de ellos.

a) Los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ son linealmente independientes, es decir: $\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \alpha_3\vec{u}_3 = \vec{0} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

Supongamos que uno de ellos es distinto de cero. Si $\alpha_1 \neq 0$, entonces

$$\vec{u}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{u}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\vec{u}_3$$

y los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ son coplanarios. Lo mismo sucede si $\alpha_2 \neq 0$ ó $\alpha_3 \neq 0$.

Luego $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es un conjunto linealmente independiente.

b) Los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ engendran el espacio $\mathbf{V}^3$, es decir, cualquier vector $\vec{x}$ de $\mathbf{V}^3$ se puede poner en la forma

$$\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2 + z_1\vec{u}_3, \quad (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$$

Tomemos representantes $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OU_1}$, $\overrightarrow{OU_2}$ y $\overrightarrow{OU_3}$ de los vectores libres $\vec{x}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ respectivamente (Fig. 4).

Si por el punto X se trazan las perpendiculares a los planos OU_1U_2, OU_2U_3 y OU_1U_3, se obtienen los puntos X', Y' y Z' respectivamente, que se llaman las proyecciones de X sobre los planos OU_1U_2, OU_2U_3 y OU_1U_3 respectivamente.

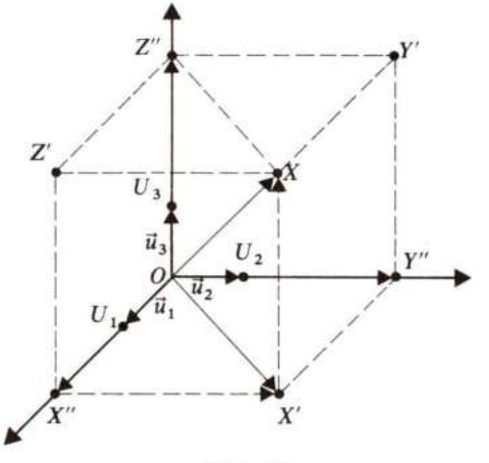
Las proyecciones de los puntos X', Y' y Z' sobre las rectas OU_1, OU_2 y OU_3 son X'', Y'' y Z'' respectivamente. Los vectores $\overrightarrow{OX''}$, $\overrightarrow{OY''}$ y $\overrightarrow{OZ''}$ se llaman las proyecciones de $\overrightarrow{OX}$ sobre OU_1, OU_2 y OU_3 respectivamente.

Las proyecciones del vector $\overrightarrow{OX}$ se pueden expresar así:

$$\overrightarrow{OX''} = x_1\vec{u}_1, \ \overrightarrow{OY''} = y_1\vec{u}_2 \text{ y } \overrightarrow{OZ''} = z_1\vec{u}_3 \quad [1]$$

ya que los vectores $\overrightarrow{OX''}$ y $\vec{u}_1$ están sobre la misma recta. Análoga observación se puede hacer para los pares de vectores $\overrightarrow{OY''}$ y $\vec{u}_2$, y $\overrightarrow{OZ''}$ y $\vec{u}_3$.

Por otra parte, $[\overrightarrow{OX}] = [\overrightarrow{OX'}] + [\overrightarrow{X'X}] = [\overrightarrow{OX'}] + [\overrightarrow{OZ''}] =$
$= [\overrightarrow{OX''}] + [\overrightarrow{OY''}] + [\overrightarrow{OZ''}]$ [2]



(Fig. 4)

De [1] y [2] resulta: $\vec{x} = [\overrightarrow{OX}] = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2 + z_1\vec{u}_3$

Los apartados a) y b) prueban que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es una base de $\mathbf{V}^3$.

Los números reales x_1, y_1, z_1 son únicos, y se llaman *coordenadas del vector libre $\vec{x}$ respecto de la base* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2$ y $\vec{u}_3\}$.

5. Demuestra, de manera análoga a como se ha hecho en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbf{V}^2$, que los números reales x_1, y_1, z_1 del vector $\vec{x}$ son únicos respecto de la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

4 Aplicaciones $E \longrightarrow V^3$ y $V^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

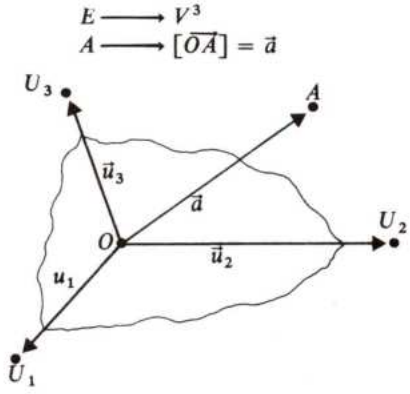
4.1. Se ha visto en **1.6.** que dado un punto O del espacio y un vector libre $\vec{a}$, existe un único representante de origen O perteneciente a $\vec{a}$.

Esta propiedad nos permite establecer una biyección entre los puntos del espacio y los vectores libres, de la siguiente forma: A cada vector libre $\vec{a}$ de $\mathbf{V}^3$ le corresponde el punto A del espacio, tal que $[\overrightarrow{OA}] = \vec{a}$ (Fig. 5).

La aplicación biyectiva de $\mathbf{E}$ en $\mathbf{V}^3$ la designaremos por p_0.

Por tanto: $p_0(A) = [\overrightarrow{OA}]$ y $p_0^{-1}([\overrightarrow{OA}]) = A$

El vector fijo $\overrightarrow{OA}$ se llama *vector de posición del punto A.*



(Fig. 5)

4.2. En este apartado se establece un isomorfismo entre los espacios vectoriales $\mathbf{V}^3$ y $\mathbb{R}^3$.

Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base de $\mathbf{V}^3$.

Un vector $\vec{x}$ de $\mathbf{V}^3$ se escribe respecto a la base B así:

$$\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2 + z_1\vec{u}_3, \quad x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{R}$$

Se define la aplicación b de $\mathbf{V}^3$ en $\mathbb{R}^3$ de la siguiente manera:

$$b : \mathbf{V}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\vec{x} \longrightarrow \mathbf{b}(\vec{x}) = (x_1, y_1, z_1)$$

De una manera análoga a como se hizo en el plano (Tema 4, apartados **2.3.** y **2.4.**), se demuestra que:

a) la aplicación b de $\mathbf{V}^3$ en $\mathbb{R}^3$ es biyectiva,

b) la aplicación b conserva la suma, es decir,

$$b(\vec{x} + \vec{y}) = b(\vec{x}) + b(\vec{y})$$

c) la aplicación b verifica finalmente

$$b(k\vec{x}) = kb(\vec{x})$$

Por tanto, b es un isomorfismo de $\mathbf{V}^3$ en $\mathbb{R}^3$.

Este isomorfismo traduce toda relación vectorial de $\mathbf{V}^3$ a una relación algebraica en $\mathbb{R}^3$.

6. Se considera en $\mathbf{E}$ un punto fijo O.

¿Qué figura forman los extremos de los representantes de los vectores libres que tienen el mismo módulo?

7. Demuestra que la aplicación b de $\mathbf{V}^3$ en $\mathbb{R}^3$ es biyectiva.

8. Demuestra que la aplicación b de $\mathbf{V}^3$ en $\mathbb{R}^3$ verifica las propiedades b) y c) de **4.2.**

5 El espacio afín. Sistema de referencia

5.1. Se llama espacio afín a la terna $(\mathbf{E}, \mathbf{V}^3, p)$ en la que p es una aplicación de $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$ en $\mathbf{V}^3$

$p : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{V}^3$ definida por $(A, B) \longrightarrow \overrightarrow{AB}$ tal que:

a) $p(A, B) + p(B, C) + p(C, A) = \vec{0}$, es decir

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \quad \text{para todo} \quad A, B, C \in \mathbf{E}$$

b) Fijado $O \in \mathbf{E}$, la aplicación $p_0 : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{V}^3$.

$$A \longrightarrow p_0(A) = [\overrightarrow{OA}]$$

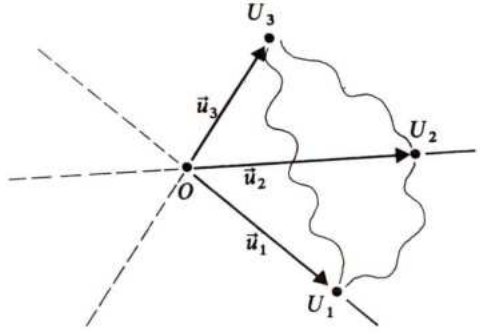
es una biyección. Obsérvese que $p_0(A) = p(O, A)$.

En otras palabras, el espacio afín es el conjunto $\mathbf{E}$ relacionado con el espacio vectorial $\mathbf{V}^3$ en la forma indicada.

5.2. Sean el espacio $\mathbf{E}$, un punto fijo O y $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base de $\mathbf{V}^3$. Se llama sistema de referencia afín al conjunto $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

La aplicación p_0 asocia los puntos U_1, U_2, U_3 a los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ respectivamente.

Las rectas OU_1, OU_2, OU_3 se llaman ejes de coordenadas y O el origen de coordenadas (Fig. 6).

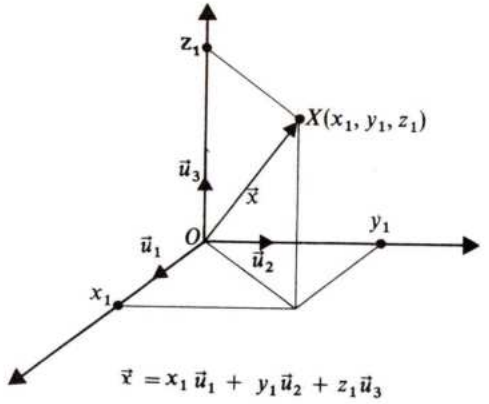


(Fig. 6)

Un sistema de referencia afín en el espacio queda también determinado por cuatro puntos, O, U_1, U_2, U_3, es decir, $\mathscr{R} = \{O; U_1, U_2, U_3\}$. Basta tomar como base del espacio afín $\overrightarrow{OU}_1 = \vec{u}_1$, $\overrightarrow{OU}_2 = \vec{u}_2$ y $\overrightarrow{OU}_3 = \vec{u}_3$.

5.3. Se llama coordenadas cartesianas del punto X respecto del sistema de referencia $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ a las coordenadas (x_1, y_1, z_1) del vector $[\overrightarrow{OX}] = \vec{x}$ en la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

Para indicar las coordenadas de un punto X en el espacio, se pondrá: $X(x_1, y_1, z_1)$ (Fig. 7).

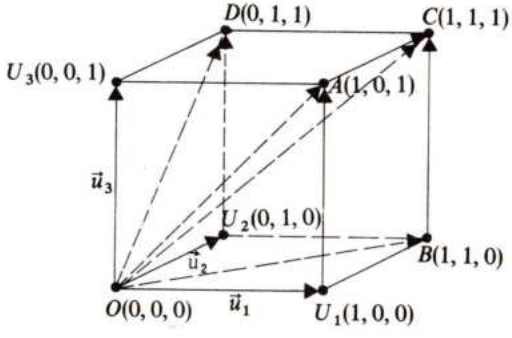


(Fig. 7)

Ejemplo:

- En la referencia $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ las coordenadas de los puntos U_1, U_2 y U_3 son: $U_1(1, 0, 0)$; $U_2(0, 1, 0)$; $U_3(0, 0, 1)$.

Se considera el sistema de referencia $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ del cubo de la figura 8. Veamos cuáles son las coordenadas de los ocho vértices.



(Fig. 8)

Las coordenadas de los puntos del sistema de referencia son:

$$O(0,0,0),\ U_1(1,0,0),\ U_2(0,1,0)\ \text{y}\ U_3(0,0,1)$$

Como:

$\overrightarrow{OB} = \vec{u}_1 + u_2$, las coordenadas de B son: $(1,1,0)$
$\overrightarrow{OA} = \vec{u}_1 + \vec{u}_3$, las coordenadas de A son: $(1,0,1)$
$\overrightarrow{OD} = \vec{u}_2 + \vec{u}_3$, las coordenadas de D son: $(0,1,1)$
$\overrightarrow{OC} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$, las coordenadas de C son: $(1,1,1)$.

6 Componentes de un vector libre definido por dos puntos

6.1. Sean $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ dos puntos del espacio afín. ¿Cuáles son los componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ que determinan? (Fig. 9).

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son los vectores de posición de los puntos A y B, se tiene: $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ [1] ya que $\vec{a} + \overrightarrow{AB} = \vec{b}$.

Teniendo en cuenta el isomorfismo entre $\mathbf{V}^3$ y $\mathbb{R}^3$, y llamando (a, b, c) a las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$, resulta:

$$(a, b, c) = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1)$$

Por tanto, $(a, b, c) = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$ [1]

Ejemplos:

- Si $A(3,4,7)$ y $B(-2,1,0)$ son dos puntos del espacio afín, las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ son:

$$(a, b, c) = (-2, 1, 0) - (3, 4, 7) = (-2, -3, 1 - 4, 0 - 7) = \\ = (-5, -3, -7)$$

- Las componentes de un vector $\overrightarrow{AB}$ son $(2,3,5)$ y las coordenadas del punto B son $(0,1,2)$. ¿Cuáles son las de $A(x_1, y_1, z_1)$?

$$(2, 3, 5) = (0 - x_1, 1 - y_1, 2 - z_1)$$

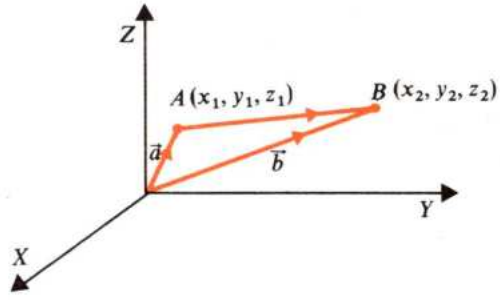
de donde $x_1 = -2,\ y_1 = -2,\ z_1 = -3$

6.2. Dos vectores equipolentes, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, tienen sus componentes iguales, y recíprocamente:

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow (a, b, c) = (a', b', c'),$$

siendo (a, b, c) las componentes de $\overrightarrow{AB}$ y (a', b', c') las componentes de $\overrightarrow{CD}$.

Esto es consecuencia del isomorfismo b de $\mathbf{V}^3$ en $\mathbb{R}^3$.



(Fig. 9)

9. Las coordenadas de los puntos A, B, C son $A(2,1,3)$; $B(2,7,5)$; $C(4,6,1)$.

Halla las componentes de:

a) $\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{AC}$; d) $\overrightarrow{BA}$.

10. Las componentes de un vector $\overrightarrow{AB}$ son $(a, b, c) = (2, 4, 6)$, y las coordenadas de B son $B(1, -1, 3)$.

Halla las coordenadas de A.

11. Comprueba si los siguientes pares de vectores, dados por los puntos

$A(0,1,0)$, $B(1,0,0)$, $C(2,-1,0)$, $D(0,-1,0)$,

son o no equipolentes:

a) $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$; c) $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BC}$.

7 Coordenadas del punto medio de un segmento

Sean A y B dos puntos del espacio afín y $\overline{AB}$ el segmento que determinan. El punto medio M de $\overline{AB}$ es un punto tal que

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB}$$

Si $\vec{a}, \vec{m}$ y $\vec{b}$ son los vectores de posición de los puntos A, M y B respectivamente, se tiene (Fig. 10):

$$\vec{m} = \vec{a} + \overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}\ (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

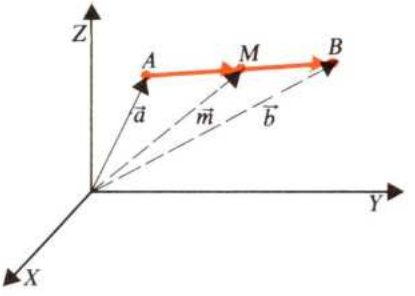
Si $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ y $M(x, y, z)$ son las coordenadas de A, B y M respectivamente, se tiene:

$$(x, y, z) = \frac{(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)}{2} =$$

$$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

Ejemplo:

- Las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{AB}$, $A(2, 1, 0)$, $B(4, 5, 2)$, son $(x, y, z) = \dfrac{(2, 1, 0) + (4, 5, 2)}{2} = (3, 3, 1)$



(Fig. 10)

12. Halla el punto medio del segmento $\overline{AB}$

$A(1, -5, 4)$, $B(3, 7, 6)$

13. Las coordenadas de uno de los extremos de un segmento AB son $A(2, -3, 4)$. Halla las coordenadas de B siendo las del punto medio $M(1, 2, 2)$.

8 Ecuaciones de la recta en el espacio

8.1. Al igual que en el plano, una recta r del espacio afín queda determinada por un punto $A \in r$ y un vector $\vec{v} \in \mathbf{V}^3$; el par $(A, \vec{v})$ se llama una determinación lineal de r.

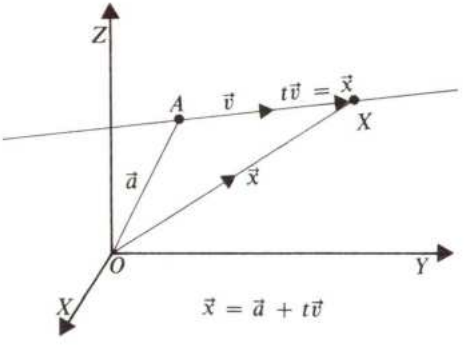
8.2. Sean A un punto de la recta r, $\vec{v}$ un vector de dirección de r y $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ un sistema de referencia del espacio afín.

Cualquier punto X de la recta r determina con A un vector $\overrightarrow{AX}$ tal que $\overrightarrow{AX} = t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$, y recíprocamente. (Fig. 11.)

Si $\vec{a}$ es el vector de posición del punto A y $\vec{x}$ el vector de posición del punto X, se tiene que $\vec{a} + \overrightarrow{AX} = \vec{x}$,

siendo $\overrightarrow{AX} = t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$, obtenemos:

$$\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}} + \mathbf{t}\vec{\mathbf{v}},\ \mathbf{t} \in \mathbb{R} \qquad [1]$$



(Fig. 11)

La relación [1] se llama *ecuación vectorial de la recta* dada por la determinación lineal $(A, \vec{v})$.

Dando valores a t se obtiene un conjunto de vectores $\vec{x}$ cuyos extremos están en r si se toma como origen de los representantes el punto O.

Ejemplos:

- La ecuación vectorial del eje OX es: $\vec{x} = t\vec{u}_1$.
- La ecuación vectorial del eje OY es: $\vec{x} = t\vec{u}_2$.
- Finalmente, la ecuación vectorial del eje OZ es: $\vec{x} = t\vec{u}_3$.

8.3. Si los vectores $\vec{a}$, $\vec{x}$, $\vec{v}$ se expresan en la referencia afín $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ como

$$\vec{a} = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2 + z_1\vec{u}_3$$

$$\vec{v} = v_1\vec{u}_1 + v_2\vec{u}_2 + v_3\vec{u}_3$$

$$\vec{x} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3$$

entonces la ecuación de la recta que se obtiene sustituyendo en la relación [1] de **8.2.** es:

$$x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 =$$

$$= (x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2 + z_1\vec{u}_3) + t(v_1\vec{u}_1 + v_2\vec{u}_2 + v_3\vec{u}_3) =$$

$$= (x_1 + tv_1)\vec{u}_1 + (y_1 + tv_2)\vec{u}_2 + (z_1 + tv_3)\vec{u}_3$$

Aplicando el isomorfismo de $\mathbf{V}^3$ en $\mathbb{R}^3$, resulta que:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{t}\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{t}\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{z} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{t}\mathbf{v}_3 \end{cases} \quad [2]$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de *ecuaciones paramétricas de la recta.*

8.4. De las ecuaciones paramétricas [2], si $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$ y $v_3 \neq 0$, despejando t se obtiene:

$$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_1}{\mathbf{v}_1} = \frac{\mathbf{y} - \mathbf{y}_1}{\mathbf{v}_2} = \frac{\mathbf{z} - \mathbf{z}_1}{\mathbf{v}_3} \quad [3]$$

Esta ecuación recibe el nombre de *ecuación continua de la recta.*

Si $v_1 = 0$, $v_2 \neq 0$ y $v_3 \neq 0$, se obtiene de [2] $x = x_1$, que es la ecuación del plano paralelo al YZ, trazado por el punto $(x_1, 0, 0)$.

14. A partir de las ecuaciones paramétricas [2], halla la ecuación del plano en el caso en que $v_1 \neq 0$, $v_2 = 0$ y $v_3 \neq 0$.

15. Escribe la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto A y es paralela al eje OZ.

16. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $A(2, -1, 0)$ y tiene por vector dirección al $\vec{v}(1, 0, 1)$.

17. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $A(2, -1, 2)$ y es paralela al eje OX.

18. Halla la ecuación continua de la recta que pasa por $A(2, 1, 0)$ y tiene por vector de dirección $\vec{v}\left(2, -1, \frac{1}{2}\right)$.

8.5. Una recta en el espacio queda también determinada por dos puntos, A y B, (Fig. 12).

El vector direccional es $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, y la ecuación vectorial

$$\vec{x} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$$

Si $A(x_2, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ y $X(x_1, y, z)$ son las coordenadas de los puntos A, B y X respectivamente, entonces las ecuaciones paramétricas vienen dadas por

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases} \quad [4]$$

La forma continua de la recta se obtiene despejando t en [4]

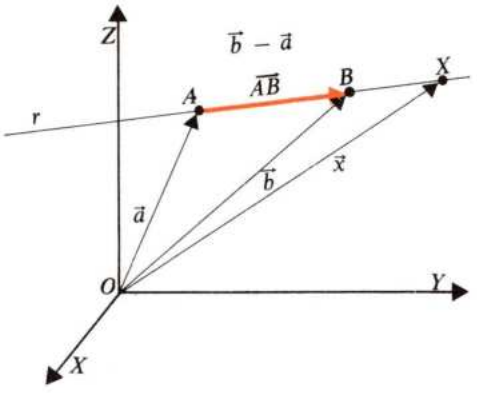
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad [5]$$

Para que esta ecuación tenga sentido es necesario que los denominadores sean distintos de 0.

Ejemplo:

- La recta que pasa por $A(2, 1, 2)$ y $B(0, 3, 5)$ tiene por ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= 2 + t(0 - 2) = 2 - 2t \\ y &= 1 + t(3 - 1) = 1 + 2t \\ z &= 2 + t(5 - 2) = 2 + 3t \end{aligned}$$



(Fig. 12)

19. Halla las ecuaciones paramétricas de las rectas que pasan por:

a) $A(2, 1, 0)$ y $B(0, 1, 2)$

b) $A(0, -1, -1)$ y $B(2, -1, 0)$

c) $A(-1, -1, -1)$ y $B(2, 2, 2)$

9 Ecuaciones del plano

9.1. Consideremos el conjunto de puntos del plano α (Fig. 13).

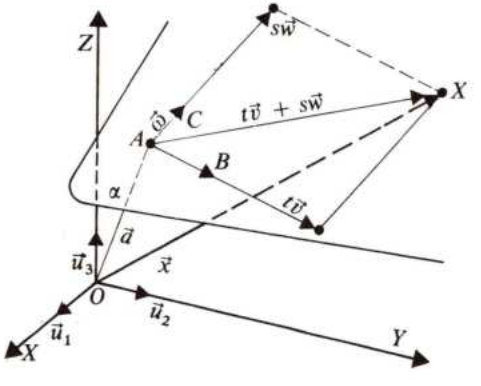
Vamos a buscar las condiciones que nos permitan saber si un punto X cualquiera pertenece o no al plano α.

Fijado un punto A del plano α, los vectores de origen A que tienen puntos de α por extremos son coplanarios.

Por tanto, tomando dos vectores de $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ linealmente independientes, todo otro vector $\overrightarrow{AX}$ es una combinación lineal de ellos, es decir: $\overrightarrow{AX} = t\vec{v} + s\vec{w}$, $\quad t, s \in \mathbb{R}$

Luego el plano α queda determinado por un punto A del mismo y dos vectores libres, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, linealmente independientes.

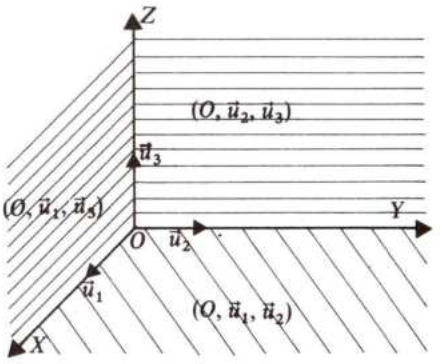
La terna $(A, \vec{v}, \vec{w})$ se llama *determinación lineal de* α, A es el punto base y $(\vec{v}, \vec{w})$ el par direccional del plano.



(Fig. 13)

Ejemplos:

- El plano OXY tiene por determinación lineal $(O; \vec{u}_1, \vec{u}_2)$.
- El plano OXZ tiene por determinación lineal $(O; \vec{u}_1, \vec{u}_3)$.
- El plano OYZ tiene por determinación lineal $(O; \vec{u}_2, \vec{u}_3)$. (Fig. 14.)



(Fig. 14)

9.2. Sean $(A, \vec{v}, \vec{w})$ una determinación lineal del plano α y $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ el sistema de referencia del espacio afín.

Cualquier punto X del plano α determina con A un vector $\overrightarrow{AX}$ tal que

$$\overrightarrow{AX} = t\vec{v} + s\vec{w}, \quad t, s \in \mathbb{R} \qquad [1]$$

Si $\vec{a}$ es el vector de posición del punto A y $\vec{x}$ el vector de posición del punto X, se tiene que

$$\vec{a} + \overrightarrow{AX} = \vec{x}$$

y sustituyendo $\overrightarrow{AX}$ por $t\vec{v} + s\vec{w}$, resulta:

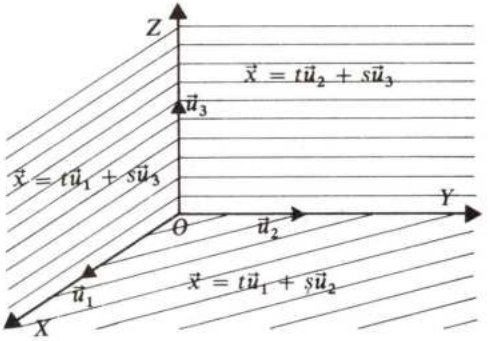
$$\mathbf{\vec{x} = \vec{a} + t\vec{v} + s\vec{w}, \quad s, t \in \mathbb{R}} \qquad [2]$$

La relación [2] se llama *ecuación vectorial del plano* dado por la determinación lineal $(A, \vec{v}, \vec{w})$.

Ejemplo:

- La ecuación vectorial del plano OXY es:

$$\vec{x} = t\vec{u}_1 + s\vec{u}_2, \quad t, s \in \mathbb{R} \qquad \text{(Fig. 15)}$$



(Fig. 15)

9.3. Si los vectores $\vec{a}, \vec{v}, \vec{w}$ y $\vec{x}$ se expresan en la referencia afín $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ como

$$\begin{cases} \vec{a} = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2 + z_1\vec{u}_3 \\ \vec{v} = v_1\vec{u}_1 + v_2\vec{u}_2 + v_3\vec{u}_3 \\ \vec{w} = w_1\vec{u}_1 + w_2\vec{u}_2 + w_3\vec{u}_3 \\ \vec{x} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 \end{cases}$$

entonces la ecuación del plano, que se obtiene sustituyendo en [2] de **9.2.**, es:

$$x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 = (x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2 + z_1\vec{u}_3) + t(v_1\vec{u}_1 + v_2\vec{u}_2 + v_3\vec{u}_3) + s(w_1\vec{u}_1 + w_2\vec{u}_2 + w_3\vec{u}_3) =$$

$$= (x_1 + tv_1 + sw_1)\vec{u}_1 + (y_1 + tv_2 + sw_2)\vec{u}_2 + (z_1 + tv_3 + sw_3)\vec{u}_3$$

20. Halla la determinación lineal del plano que pasa por A y es paralelo al plano OXY.

21. Halla la ecuación vectorial del plano que pasa por el punto A y es paralelo al plano que determinan los ejes OX y OZ.

Teniendo en cuenta el isomorfismo que existe entre $\mathbf{V}^3$ y $\mathbb{R}^3$, resultan las ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{x = x_1 + tv_1 + sw_1} \\ \mathbf{y = y_1 + tv_2 + sw_2} \\ \mathbf{z = z_1 + tv_3 + sw_3} \end{cases} \quad [3]$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de *ecuaciones paramétricas del plano.*

Ejemplo:

- El plano α tiene por vectores de dirección $\vec{v}(1, 1, 0)$ y $\vec{w}(0, 1, 1)$ y pasa además por el punto $A(-1, 3, -2)$.

  Las ecuaciones paramétricas del plano se obtienen sustituyendo en [3] estos valores. Se tiene, pues,

$$\begin{cases} x = -1 + t \cdot 1 + s \cdot 0 = -1 + t \\ y = 3 + t \cdot 1 + s \cdot 1 = 3 + t + s \\ z = -2 + t \cdot 0 + s \cdot 1 = -2 + s \end{cases}$$

9.4. Se puede comprobar que despejando los parámetros t y s en [3] se obtiene una relación de la forma

$$\mathbf{Ax + By + Cz + D = 0} \quad [4]$$

donde A, B, C y D son números reales.

Esta ecuación recibe el nombre de *ecuación general del plano.*

Ejemplo:

- Consideremos el plano del último ejemplo.

  Las ecuaciones paramétricas eran:

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + t + s \\ z = -2 + s \end{cases}$$

  De la primera y tercera ecuación obtenemos que

$$\begin{cases} t = x + 1 \\ s = z + 2 \end{cases}$$

  Sustituyendo en la segunda, resulta:

  $y = 3 + (x + 1) + (z + 2) \Longrightarrow x - y + z + 6 = 0,$

  que es la ecuación general del plano.

22. Escribe las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por $A(2, 1, -1)$ y es paralelo al plano OXY.

23. Los vectores direccionales de un plano son $\vec{v}(2, 0, -1)$ y $\vec{w}(-1, 2, 3)$.

Si pasa por el punto $A(0, 1, -2)$, ¿cuáles son las ecuaciones paramétricas?

24. Halla la ecuación general del plano que pasa por $A(2, 0, 1)$ y tiene por vectores direccionales $\vec{v}(2, 0, 0)$ y $\vec{w}(0, 1, 1)$.

25. Halla la ecuación general del plano que pasa por el punto $A(1, 1, 0)$ y tiene por vectores direccionales $\vec{v}(1, 1, 0)$ y $\vec{w}(0, 0, 1)$.

10 Ecuación del plano que pasa por tres puntos

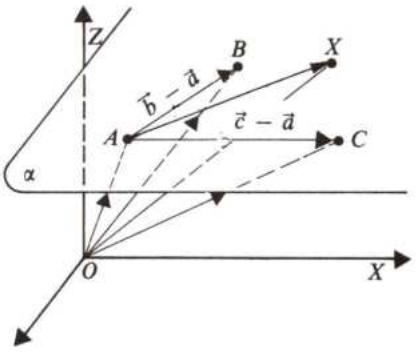
10.1. Un plano α del espacio afín queda determinado por tres puntos, no alineados, distintos dos a dos. (Fig. 16).

10.2. La ecuación vectorial del plano determinado por los puntos A, B, C es:

$$\vec{x} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a}) \quad [1] \quad \text{(Fig. 16)}$$

Si $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ y $X(x, y, z)$ son las coordenadas de los puntos A, B, C y X respectivamente, las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) + s(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) + s(y_3 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) + s(z_3 - z_1) \end{cases}$$



(Fig. 16)

Ejemplos:

- Las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por los puntos $A(0, 1, 2)$, $B(1, 2, 1)$ y $C(0, 0, 1)$ son:

$$\begin{cases} x = 0 + t(1 - 0) + s(0 - 0) = t \\ y = 1 + t(2 - 1) + s(0 - 1) = 1 + t - s \\ z = 2 + t(1 - 2) + s(1 - 2) = 2 - t - s \end{cases} \quad [1]$$

Eliminando t y s en [1], se tiene:

$$y = 1 + x - s \Longrightarrow s = -y + 1 + x$$
$$z = 2 - x + y - 1 - x \Longrightarrow -2x + y - z + 1 = 0$$

que es la ecuación general del plano determinado por los puntos A, B y C.

- El plano determinado por los puntos $A(1, 0, 0,)$, $B(0, 1, 0)$ y $C(0, 0, 1)$ tiene por ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 1 + t(0 - 1) + s(0 - 1) = 1 - t - s \\ y = 0 + t(1 - 0) + s(0 - 0) = t \\ z = 0 + t(0 - 0) + s(1 - 0) = s \end{cases} \quad [2]$$

Eliminando t y s en [2], se obtiene: $x + y + z = 1$, que es la ecuación general del plano.

26. Halla las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por los puntos $A(0, 1, 0)$, $B(1, -1, 0)$ y $C(0, 2, 0)$.

27. Halla la ecuación general del plano que pasa por los puntos $A(0, 1, 0)$, $B(0, 3, 1)$ y $C(1, 1, 0)$.

Ejercicios y cuestiones

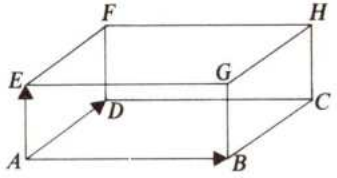
28. El punto medio de un segmento es $M(2, -1, 0)$ y uno de sus extremos tiene por coordenadas $(2, 5, 1)$. Halla las coordenadas del otro extremo.

29. La razón simple en el espacio se define del mismo modo que en el plano, es decir: si A y B son dos puntos fijos del espacio y M un punto variable, la razón simple en que M divide al segmento $\overrightarrow{AB}$ verifica la relación $\overrightarrow{MA} = \lambda \overrightarrow{MB}$. Halla las ecuaciones paramétricas del punto M si $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$.

30. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(0, 0, 2)$, $B(0, 2, 0)$.

31. Considera el conjunto de vectores determinados por los vértices de un ortoedro e indica el número de vectores libres que determinan.

32. Se considera el ortoedro de la figura donde $ADFE$ es un cuadrado y $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AE}$, y en él el sistema de referencia dado por $\mathcal{R} = \{A, D, E, B\}$. Siendo $\overrightarrow{AB} = \vec{u}_1$, $\overrightarrow{AD} = \vec{u}_2$ y $\overrightarrow{AE} = \vec{u}_3$, halla las coordenadas de los vértices.



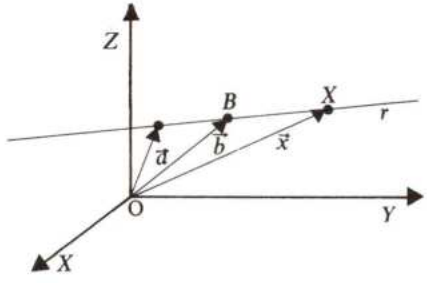
33. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, 4, 6)$ y $B(1, -1, 1)$.

34. Los puntos $A(-1, 1, 0)$, $B(0, -1, 0)$ y $C(3, 2, 0)$ son vértices del paralelogramo $ABCD$. Calcula las coordenadas del cuarto vértice.

35. Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(0, 1, 2)$, $B(3, 2, -5)$, $C(4, -2, 6)$

36. Se consideran los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ y el conjunto de vectores

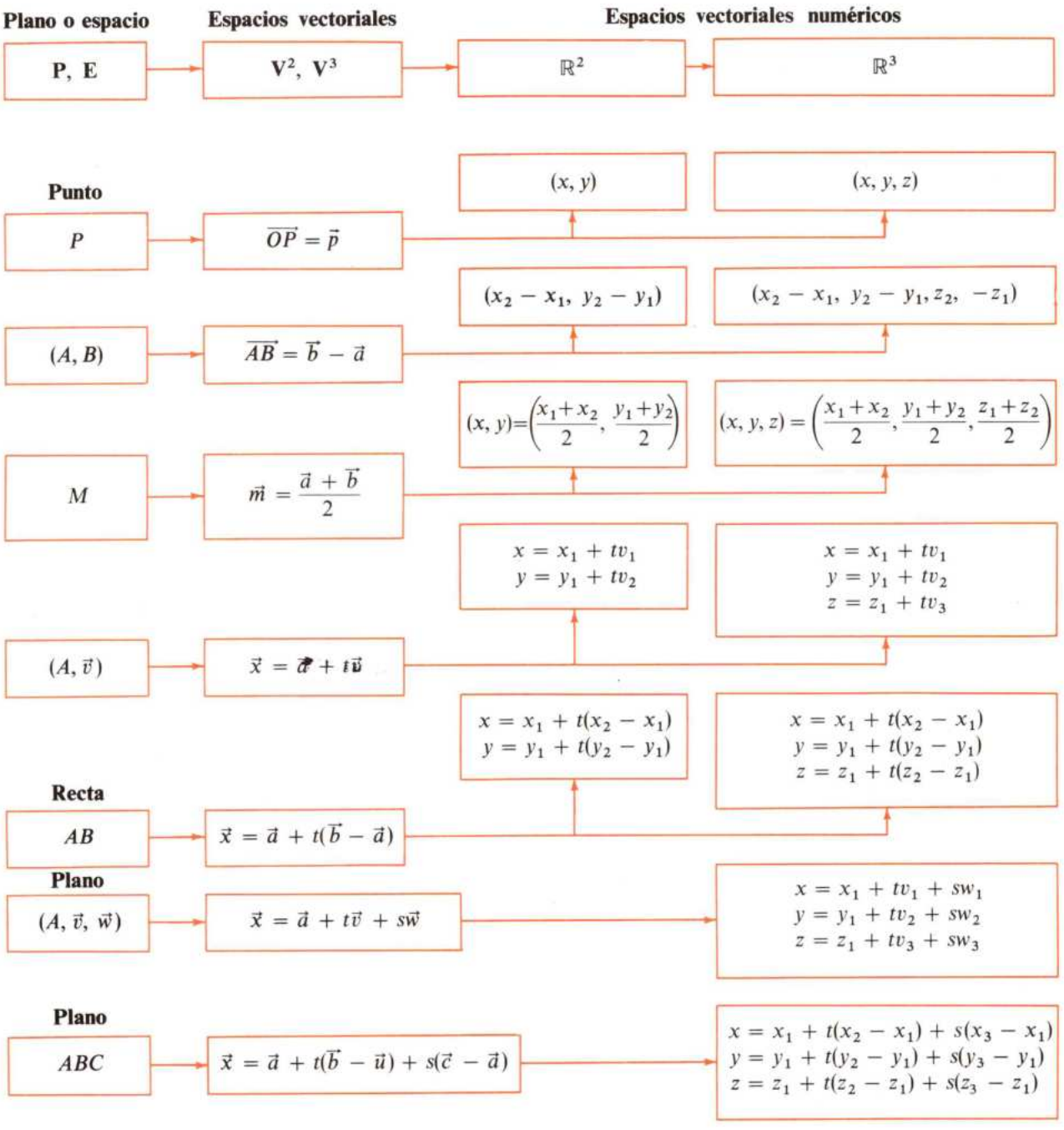
$$F = \{\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB},\ t \in [0, 1]\}$$



¿Qué figura forman los extremos de los vectores del conjunto F?

DIAGRAMA ESTRUCTURAL DE LA UNIDAD 2

GEOMETRIA VECTORIAL Y AFIN



Unidad 3 SUCESIONES. LIMITES. EL NUMERO e

Se inicia en esta Unidad el estudio de una serie de conceptos básicos del cálculo infinitesimal que tienen su origen intuitivo en las nociones de proximidad, continuidad, vecindad, etc.

En el tema 7, primero de esta Unidad, se precisan los conceptos de valor absoluto y entorno, que a lo largo del curso van a ser de utilización constante.

El tema 8 se ocupa de la estructura del conjunto de las sucesiones de números reales, así como de la estructura de las sucesiones acotadas.

El concepto fundamental de límite de una sucesión se estudia en el tema 9 y a la vez se da la estructura de las sucesiones convergentes.

La Unidad termina en el tema 10, donde además del estudio del número e se da el cálculo efectivo del límite de algunas sucesiones sencillas.

Tema 7

1. El orden en la recta real.
2. Valor absoluto.
3. Propiedades del valor absoluto.
4. Conjuntos acotados. Axioma del extremo superior.
5. Intervalos o segmentos en $\mathbb{R}$.
6. Entorno de un punto.
7. Recta ampliada $\overline{\mathbb{R}}$.
8. Entornos de los puntos $-\infty$ y $+\infty$.

Tema 8

1. Sucesiones de números reales.
2. Determinación y representación de sucesiones.
3. Adición de sucesiones.
4. Propiedades de la adición de sucesiones.
5. Multiplicación de sucesiones.
6. Propiedades de la multiplicación de sucesiones.
7. El espacio vectorial de las sucesiones.
8. El anillo $(\mathbf{S}, +, \cdot)$ y el espacio vectorial $(\mathbf{S}, +, \cdot\, \mathbb{R})$.
9. Sucesiones monótonas.
10. Sucesiones acotadas.

Tema 9

1. Idea intuitiva de límite de una sucesión.
2. Definición de límite. Sucesiones convergentes.
3. Propiedades de los límites.
4. Adición de sucesiones convergentes. El grupo $(\mathbf{S}_L, +)$.
5. Multiplicación de sucesiones convergentes.
6. Multiplicación de una sucesión convergente por un número real. El espacio vectorial $(\mathbf{S}_L, +, \cdot\, \mathbb{R})$.
7. Sucesiones nulas.
8. Límite de sucesiones monótonas y acotadas.
9. Sucesiones monótonas contiguas.

Tema 10

1. Límite de las sucesiones

$$\left(\frac{1}{n}\right), \left(\frac{k}{n}\right), \cdots, \left(\frac{k}{n^{\alpha}}\right), \ \alpha \in \mathbb{N}^*.$$

2. Límite del cociente de polinomios en n.
3. Límite de sucesiones con expresiones radicales.
4. El número e. Existencia.
5. Cálculo aproximado del número e.
6. Límite de la sucesión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$
7. Límites infinitos.
8. Cálculo con límites infinitos.

Tema 7 LA RECTA REAL

En la primera parte de este tema se estudian los conceptos de orden, valor absoluto y distancia; se completa el desarrollo con el estudio de la recta ampliada.

1 El orden en la recta real

1.1. El axioma de continuidad permite establecer una biyección c del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales en la recta r.

La recta r, una vez representados en ella los números reales, se llama *recta real.*

Dados dos números reales; a y b, se dice que *a es menor o igual que b*, y se escribe $a \leqslant b$, cuando existe otro número $c \in \mathbb{R}_+$ tal que $a + c = b$

es decir, $a \leqslant b \iff \exists\, c \in \mathbb{R}_+ \mid a + c = b.$

Se define $a < b$ cuando $a \leqslant b$ y $a \neq b$.

Ejemplo:

- $3 < 5$, ya que $3 \leqslant 5$ y $3 \neq 5$.

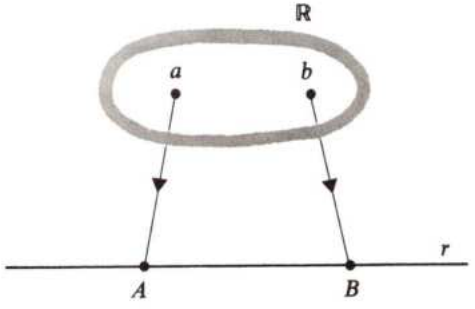
La relación $a \leqslant b$ es equivalente a $b \geqslant a$; se lee b es mayor o igual que a.

Dados dos puntos de r, A y B, de abscisas a y b respectivamente, se dice que A es anterior o igual a B si y sólo si $a \leqslant b$. (Fig. 1)

Esta relación se designa también con el símbolo «$\leqslant$».

Ejemplo:

- En la figura 2, $A \leqslant B$, ya que sus abscisas -1 y 2 respectivas verifican la relación $-1 \leqslant 2$.



(Fig. 1)

$A \leqslant B$ es equivalente a $a \leqslant b$

(Fig. 2)

$A \leqslant B \iff -1 \leqslant 2$

1.2. La relación «... menor o igual que...» en $\mathbb{R}$ es una relación de orden total.

Este orden se llama *orden natural de* $\mathbb{R}$.

Recordemos las cuatro propiedades de *orden total:*

Propiedad reflexiva. Para cada número $a \in \mathbb{R}$, $a \leqslant a$.

Propiedad antisimétrica. Si $a \leqslant b$ y $b \leqslant a$, entonces $a = b$.

Propiedad transitiva. Si $a \leqslant b$ y $b \leqslant c$, entonces $a \leqslant c$.

Propiedad de tricotomía. Para cada $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$ o $b \leqslant a$.

La demostración de la propiedad transitiva se encuentra en el margen. Razona cada uno de los pasos.

El conjunto de los números reales con la relación de orden «$\leqslant$» es un *conjunto totalmente ordenado.*

La relación «$\leqslant$» definida entre los puntos de la recta r es también una relación de orden total, y el conjunto de los puntos r es también un conjunto totalmente ordenado.

1.3. Si a, b y c son tres números reales, entonces

$$a \leqslant b \text{ es equivalente a, } a + c \leqslant b + c$$

Vamos a demostrar esta propiedad que relaciona el orden con la adición.

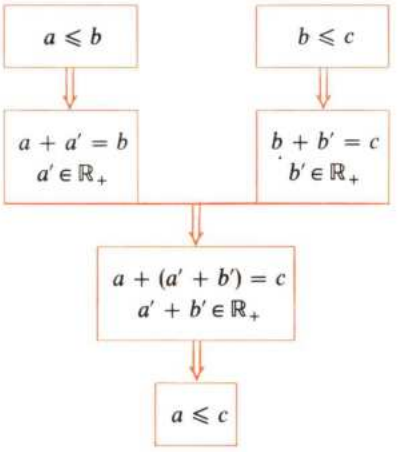
$$a \leqslant b \iff a + a' = b, \quad \text{siendo} \quad a' \in \mathbb{R}_+$$

sumando a los dos miembros c resulta $a + a' + c = b + c$ y según la definición de orden: $a + c \leqslant b + c$.

Ejemplos:

- $3 \leqslant 7 \Longrightarrow 3 + 2 \leqslant 7 + 2$

- $5x + 1 \leqslant 11$, sumando a los dos miembros -1 queda $5x \leqslant 10 \Longrightarrow x \leqslant 2$. El conjunto solución $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$ se ha representado en la siguiente figura:



Ejercicios:

1. Si $x = 3$, ordena los números del conjunto

$$H = \left\{x, -x, \frac{1}{x}, -\frac{1}{x}, 1, -1, 0\right\}$$

2. Ordena los siguientes números:

$$a^2 + b^2, \ (a + b)^2, \ (a - b)^2$$

3. Dados los números reales a y b positivos, indica cuál de los dos números $\sqrt{ab}$ y $\dfrac{a + b}{2}$ es mayor. Razona tu respuesta y pon ejemplos.

4. Resuelve la inecuación $-1 + x \leqslant 2x - 7$ y representa el conjunto solución.

5. Resuelve la inecuación $-3 + x \leqslant 2x + 9$, razonando cada uno de los pasos, y representa el conjunto solución.

1.4. Se verifican las siguientes propiedades:

a) $a \leqslant b$ y $c \in \mathbb{R}$, $\Longrightarrow a + c \leqslant b + c$.

b) $a \leqslant b$ y $c \leqslant d$, $\Longrightarrow a + c \leqslant b + d$

c) $a \leqslant b$ y $c < d$, $\Longrightarrow a + c < b + d$

d) $0 \leqslant a \Longrightarrow -a \leqslant 0$; $a \leqslant 0 \Longrightarrow 0 \leqslant -a$

En el margen se encuentra el esquema de la demostración de la propiedad b).

La interpretación en la recta real de la propiedad d) está en la figura 3. Los números a y $-a$ son opuestos y en consecuencia simétricos respecto del origen O.

1.5. En el cuerpo de los números reales las relaciones

$$0 \leqslant a \quad \text{y} \quad a \leqslant b \quad \text{implican} \quad 0 \leqslant ab$$

es decir, el producto de dos números reales positivos es un número real positivo.

Esta propiedad, que no demostraremos, permite probar todas las demás relativas al producto y orden.

1.6. Las relaciones $a \leqslant b$ y $0 \leqslant c$ implican $ac \leqslant bc$.

En efecto:

$a \leqslant b \Longrightarrow 0 \leqslant b - a \Longrightarrow 0 \leqslant (b - a)c$ ya que el producto de dos números positivos es otro número positivo. Aplicando la propiedad distributiva se tiene: $0 \leqslant bc - ac$,

luego $ac \leqslant bc$

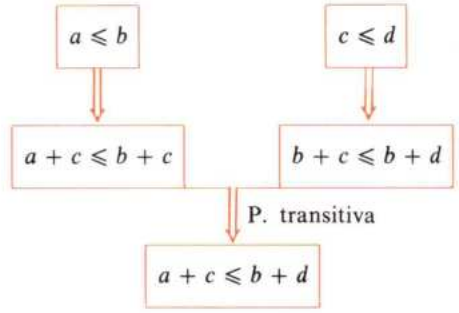
Ejemplos:

- $3 \leqslant 5 \Longrightarrow 3 \cdot 2 \leqslant 5 \cdot 2$
- $3 \leqslant 5 \Longrightarrow 3 \cdot (-2) \leqslant 5 \cdot -2)$ ya que $-6 \geqslant -10$.

Este ejemplo muestra la necesidad de ser $0 \leqslant c$ para que se cumpla la propiedad anterior.

1.7. Las relaciones $0 \leqslant a \leqslant b$ y $0 \leqslant c \leqslant d$ implican $ac \leqslant bd$.

La demostración se hace al margen. ¿Qué propiedades se aplican en cada uno de los pasos?



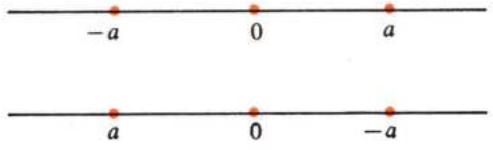
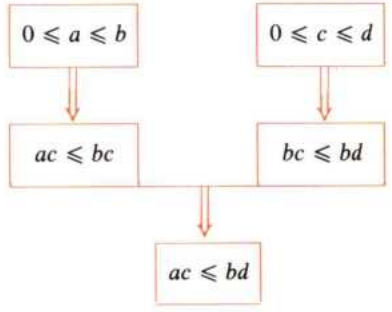


Fig. 3)



6. Demuestra la propiedad a), de forma análoga a como se ha hecho la propiedad b) de **1.4.**

7. Demuestra que si $a > 1$ entonces $a^2 > a > 1$.

1.8. La relación $0 < a < b$ implica $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Siendo a y b números positivos, su producto ab también lo es, y lo mismo sucede con su inverso $\frac{1}{ab}$.

Multiplicando por $\frac{1}{ab}$ resulta:

$$0 \cdot \frac{1}{ab} < \frac{a}{ab} < \frac{b}{ab} \implies 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

Ejemplos:

- De $0 < 2 < 5$ resulta que $0 < \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ (Fig. 4).
- De $0 < \frac{1}{3} < \frac{3}{4}$ se obtiene $0 < \frac{4}{3} < 3$. (Fig. 5).

Se observa que cuanto más grande es un número, más pequeño es su inverso.

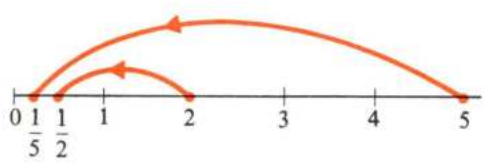
1.9. Las relaciones $a \leqslant b$ y $c \leqslant 0$ implican $bc \leqslant ac$.

Ejemplo:

- $2 \leqslant 3$ y $c = -5$, entonces $3 \cdot (-5) \leqslant 2 \cdot (-5)$, es decir:

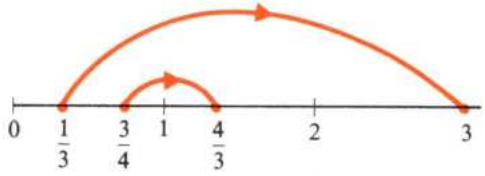
$$-15 \leqslant -10$$

El producto de los términos de una desigualdad por un número negativo cambia el orden de los elementos de la relación.



$$0 < 2 < 5 \implies 0 < \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$$

(Fig. 4)



(Fig. 5)

8. ¿Son equivalentes las relaciones $a < b$ y $a^2 < b^2$? Razona la contestación.

9. ¿Son equivalentes las relaciones $0 < a < b$ y $a^2 < b^2$? Razona la contestación.

10. Demuestra la relación

$$a < b < 0 \implies a^3 < b^3 < 0$$

2 Valor absoluto

Se llama *valor absoluto* del número a, y se designa por $|a|$, al mayor de los números a, y $-a$, es decir, $a = \text{máx}\,\{a, -a\}$.

Ejemplos:

- El valor absoluto de 3 es 3, ya que máx $\{3, -3\} = 3$.
- El valor absoluto de -3 es 3, ya que máx $\{3, -3\} = 3$.

El valor absoluto de un número real positivo coincide con el mismo, es decir: $|a| = a$ si $a \geqslant 0$.

El valor absoluto de un número real negativo es igual a su opuesto, es decir: $|a| = -a$ si $a < 0$

Siendo máx $\{a, -a\}$ un número único, se sigue que $|a| = |-a|$. Esta igualdad nos dice que dos números opuestos tienen el mismo valor absoluto. De aquí resulta que el valor absoluto es una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}_+$.

$| \ | : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definida por

$$\mathbf{a} \longrightarrow |\mathbf{a}| = \begin{cases} \mathbf{a} & \text{si} \quad \mathbf{a} \geqslant \mathbf{0} \\ -\mathbf{a} & \text{si} \quad \mathbf{a} < \mathbf{0} \end{cases}$$

Ejemplos:

- $|5| = |-5|$
- $|0| = 0$

Si $x \geqslant 0$, entonces $|x| = x \geqslant 0$. Si $x < 0$, entonces $x < |x|$.

En todo caso se verifica $x \leqslant |x|$ y $|x| \geqslant 0$.

3 Propiedades del valor absoluto

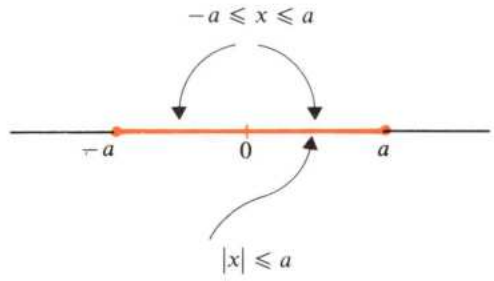
3.1. Si $a > 0$, la relación $|x| \leqslant a$ es equivalente a $-a \leqslant x \leqslant a$ (Fig. 6).

En efecto: si $x \geqslant 0$, la relación $-a < x$ se verifica siempre y la relación $|x| \leqslant a$ es equivalente a $x \leqslant a$.

Si, por el contrario, $x \leqslant 0$, la relación $x \leqslant a$ se verifica también siempre, y la relación $|x| \leqslant a$ es equivalente $-x \leqslant a$, y por tanto $-a \leqslant x$.

En ambos casos $|x| \leqslant a$ es equivalente $-a \leqslant x \leqslant a$.

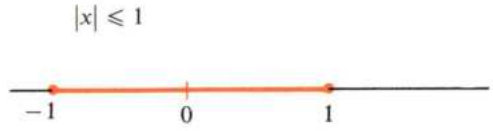
En el razonamiento anterior también ha aquedado probado que $|x| < a$ es equivalente a $-a < x < a$.



(Fig. 6)

Ejemplos:

- La relación $|x| \leqslant 3$ es equivalente $-3 \leqslant x \leqslant 3$.
- En la recta real el conjunto de puntos x tales que $|x| \leqslant 1$ se ha representado en la figura 7.



(Fig. 7)

3.2. $|a| = 0 \iff a = 0$

$$\begin{cases} \text{Si } |a| = 0 \Longrightarrow \text{máx } \{a, -a\} = 0 \Longrightarrow a = 0 \\ \text{Si } a = 0 \Longrightarrow |a| = \text{máx } \{a, -a\} = 0 \end{cases}$$

3.3. La siguiente propiedad, llamada *desigualdad triangular*, expresa el comportamiento del valor absoluto frente a la suma $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ (Desigualdad triangular).

Ejemplo:

- $|(-2) + (+5)| \leqslant |(-2)| + |(+5)|$
  $\downarrow \qquad\qquad \downarrow$
  $|+3| \qquad |-2| + |+5|$

Probemos esta propiedad:

Cualesquiera que sean los números a y b, se verifica

$$\left.\begin{array}{l} |a| = a \text{ o bien } |a| = -a \\ |b| = b \text{ o bien } |b| = -b \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} -|a| \leqslant a \leqslant |a| \\ -|b| \leqslant b \leqslant |b| \end{array}$$

sumando ambas desigualdades se tiene:

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|$$

y por lo dicho en **3.1.** se sigue que $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

3.4. Si a y b son dos números reales, se verifica

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$$

Ejemplo:

- $|(-3) \cdot (-5)| = |(-3)| \cdot |(-5)|$

Consideraremos los siguientes casos:

a) $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$, entonces como $a \cdot b \geqslant 0$, se tiene

$$\left\{\begin{array}{l} |a \cdot b| = a \cdot b \\ |a| = a, \qquad \text{luego } |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \\ |b| = b \end{array}\right.$$

b) $a \leqslant 0$ y $b \leqslant 0$, entonces como $a \cdot b \geqslant 0$ se tiene

$$\left\{\begin{array}{l} |a \cdot b| = a \cdot b \\ |a| = -a \qquad \text{luego } |a \cdot b| = |a| \cdot |b|. \\ |b| = -b \end{array}\right.$$

c) $a \geqslant 0$ y $b \leqslant 0$, entonces como $ab \leqslant 0$, resulta

$$\left\{\begin{array}{l} |a \cdot b| = -ab \\ |a| = a \qquad \text{y también se verifica: } |a \cdot b| = |a| \cdot |b|. \\ |b| = -b \end{array}\right.$$

d) $a \leqslant 0$ y $b \geqslant 0$ se prueba del mismo modo que el caso c).

11. ¿Son equivalentes las relaciones $a \leqslant b$ y $|a| \leqslant b$? ¿Por qué?

Razona la contestación. En caso negativo por un ejemplo.

12. Representa en el plano cartesiano la función $y = |x|$. ¿Cuál es el recorrido?

13. Dibuja en una recta el conjunto de puntos que verifican $|x| \leqslant 2$.

14. Expresa de otra forma el conjunto $|x| \leqslant 5$.

15. ¿Cuál es el conjunto de números reales x que verifican simultáneamente las relaciones

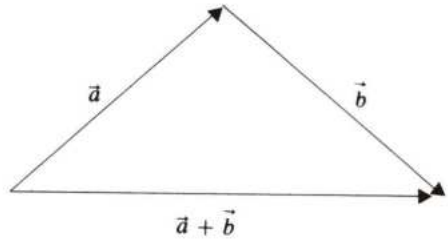
$$|x| \leqslant 3 \quad \text{y} \quad 2 \leqslant |x|$$

Haz la representación en la recta real.

16. ¿Es cierta la relación $a + b \leqslant |a| + |b|$?

¿Por qué?

17. Si consideramos $\vec{a}$, $\vec{b}$ como vectores libres, es decir, $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbf{V}^2$, la relación $|\vec{a} + \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$ se interpreta gráficamente así:



Es decir, «el módulo de la suma es menor o igual que la suma de los módulos».

¿Qué propiedad de los triángulos se aplica?

3.5. El valor absoluto respecto a la diferencia verifica también las siguientes propiedades:

a) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$

b) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$

c) $||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|| \leqslant |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$

Ejemplos:

- $|3 - 5| = |5 - 3|$, es decir $|-2| = |2|$
- $|3 - 5| \leqslant |3| + |-5|$ ya que $|-2| = 2$, $|3| + |-5| = 8$
- $|2| - |7| \leqslant |2 - 7|$, puesto que $2 - 7 \leqslant 5$
- $\big||2| - |-7|\big| \leqslant |2 - (-7)|$, puesto que $2 - 7 \leqslant 9$.

3.6. El valor absoluto nos permite definir en la recta real una distancia.

Se llama *distancia* entre dos puntos, A y B, de abscisas a y b, respectivamente, y se designa por $d(A, B)$ o $d(a, b)$ al número real $|b - a|$.

$$d(A, B) = d(a, b) = |b - a| = |a - b| \quad \text{(Fig. 8)}$$

(Fig. 8)

$$d(A, B) = d(a, b) = |a - b| = |b - a|$$

18. ¿Es cierta la relación $|a| - |b| \leqslant |a - b|$?

En caso negativo, pon un ejemplo.

19. ¿Es cierta la relación $a - b \leqslant |a| + |b|$?

Razona tu contestación.

20. Teniendo en cuenta que $|a - b| = |a + (-b)|$, prueba que $|a - b| \leqslant |a| + |b|$ aplicando la propiedad triangular.

21. Comprueba con ejemplos que se verifica:

$$\Big||a| - |b|\Big| \leqslant |a - b|$$

22. Dados los puntos A, B y C, de abscisas -1, -3, -5 respectivamente, comprueba que se verifica la desigualdad triangular

$$d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(C, B)$$

4 Conjuntos acotados. Axioma del extremo superior

4.1. *Se llama cota superior de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ a todo elemento k de $\mathbb{R}$ tal que*

$$x \leqslant k \text{ para todo } x \in A$$

Ejemplos:

- Si $A = \{2, 4, 6\}$, entonces 8 es una cota superior de A, puesto que $2 \leqslant 8$, $4 \leqslant 8$ y $6 \leqslant 8$.

  También son cotas superiores el 10, 12, 10.000, etc.

- Si $A = \mathbb{Z}$, no existe ninguna cota superior, ya que dado cualquier número siempre existen números enteros mayores que él.

23. Pon tres ejemplos de conjuntos acotados superiormente, y otros tres de conjuntos no acotados.

24. Dado el conjunto

$$A = \left\{x \mid x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

comprueba si está o no acotado superiormente.

Un conjunto A que tiene una cota superior se dice que está acotado superiormente.

Ejemplos:

- $A = \{2, 4, 6\}$ es un conjunto acotado superiormente.
- $\mathbb{N}$ es un conjunto que no está acotado superiormente.

4.2. *Se llama cota inferior de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ a todo elemento k de $\mathbb{R}$ tal que*

$$k \leq x \quad \text{para todo} \quad x \in A$$

Ejemplo:

- El conjunto $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ tiene como cota inferior a 1, ya que 1 es menor o igual que cualquier elemento de A.

También son cotas inferiores el 0, -1, -7, -100, etc.

Ejemplo:

- El conjunto $\mathbb{N}$ es un conjunto que tiene por cotas inferiores -1, -2, $-\sqrt{2}$, etc.

Un conjunto A que tiene una cota inferior se dice que está acotado inferiormente.

Ejemplos:

- Los conjuntos A y $\mathbb{N}$ de los ejemplos anteriores está acotados inferiormente.
- El conjunto $\mathbb{Z}$ no está acotado inferiormente, ya que existen números enteros menores que cualquier número dado.

4.3. *Un conjunto que está acotado superior e inferiormente se dice que está acotado.*

De otro modo, un conjunto A está acotado si existen dos números reales k y k' tales que

$$k \leqslant x \leqslant k' \quad \text{para todo} \quad x \in A$$

Los puntos $x \in A$ pertenecen al segmento $[k, k']$ de la recta real. (Fig. 9)

(Fig. 9)

25. Pon tres ejemplos de conjuntos acotados inferiormente y otros tres de conjuntos no acotados.

26. Se considera el conjunto

$$A = \left\{ x \mid x = \frac{n+1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

¿Está acotado inferiormente?

4.4. Otra definición equivalente es la siguiente:

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se dice que es acotado si existe un número real $k > 0$ tal que

$$\forall x \in A \quad \text{se verifica} \quad |x| \leqslant k$$

Probemos la equivalencia de ambas definiciones

$$\forall x \in A,\ |x| \leqslant k \Longrightarrow -k \leqslant x \leqslant k$$

luego k es una cota superior y $-k$ es una cota inferior.

Recíprocamente si $k' \leqslant x \leqslant k''$

entonces tomando $k = \text{máx}\,\{|k'|, |k''|\}$ se tiene

$$|x| \leqslant k, \quad \forall x \in A$$

Ejemplos:

- El conjunto $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ está acotado por $k = 0$ y $k' = 10$, es decir: $0 < x < 10$

  o también: $-10 \leqslant x \leqslant 10$ para todo $x \in A$.

- Los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ no están acotados.

4.5. *Se llama supremo o extremo superior de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente, a la mínima de todas las cotas superiores.*

Se llama ínfimo o extremo inferior de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ acotado inferiormente, a la máxima de todas las cotas inferiores.

Ejemplos:

- Dado el conjunto $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, los números 2 y 10 son el ínfimo y el supremo de A respectivamente.
- Si $A = \mathbb{N}$, el ínfimo es el 0, pero no tiene supremo, ya que no está acotado superiormente.
- En $A = \mathbb{Z}$ no existen ni supremo ni ínfimo, ya que no está acotado ni superior ni inferiormente.

4.6. Axioma de extremo superior.

Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y está acotado superiormente, entonces posee un supremo.

Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y está acotado inferiormente, entonces posee un ínfimo.

27. Comprueba que los elementos del conjunto $\left\{\dfrac{n+1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ están acotados entre 5 y -2.

28. Dado el conjunto $\left\{\dfrac{n+1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ comprueba que para todo n, se verifica

$$-2 \leqslant \frac{n+1}{n} < 2.$$

5 Intervalos o segmentos en $\mathbb{R}$

La relación de orden definida en $\mathbb{R}$ permite expresar de forma sencilla algunos subconjuntos de números reales que serán básicos en el cálculo infinitesimal.

5.1. Dados dos números reales, a y b, con $a \leqslant b$, se llama *intervalo cerrado* o *segmento cerrado* de extremos a y b al conjunto de números reales x tales que

$$a \leqslant x \leqslant b$$

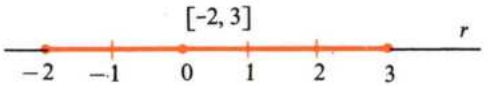
El intervalo cerrado se denota por $[a, b]$. Así pues:

$$[\mathbf{a, b}] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} \mid \mathbf{a} \leqslant \mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}\}$$

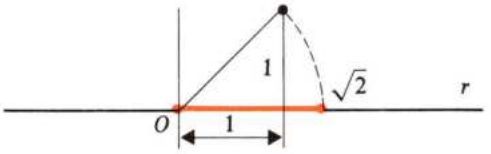
Los extremos del intervalo cerrado pertenecen al mismo.

Ejemplos:

- La figura 10 representa el intervalo cerrado $[-2, 3]$.
- El intervalo $[0, \sqrt{2}]$ viene representado en la figura 11.



(Fig. 10)



(Fig. 11)

5.2. Dados dos números reales, a y b, $a < b$, se llama *intervalo abierto* de extremos a y b el conjunto de números reales x tales que

$$a < x < b$$

El intervalo abierto se denota por $]a, b[$. Así pues:

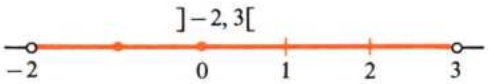
$$]\mathbf{a, b}[= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} \mid \mathbf{a} < \mathbf{x} < \mathbf{b}\}$$

Los extremos del intervalo abierto *no* pertenecen al mismo.

La figura 12 muestra la representación de $]a, b[$ en la recta real.

(Fig. 12)

La figura 13 representa el intervalo abierto $]-2, 3[$.

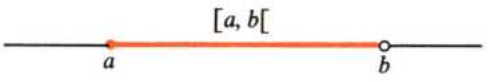


(Fig. 13)

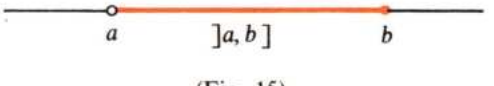
5.3. De una manera análoga se definen los intervalos abiertos por la derecha o por la izquierda:

$$[\mathbf{a, b}[= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} \mid \mathbf{a} \leqslant \mathbf{x} < \mathbf{b}\} \quad \text{(Fig. 14)}$$

$$]\mathbf{a, b}] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} \mid \mathbf{a} < \mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}\} \quad \text{(Fig. 15)}$$



(Fig. 14)



(Fig. 15)

6 Entorno de un punto

6.1. Se llama *entorno abierto simétrico*, o simplemente entorno, del punto a y radio ε, y se designa por $E(a, \varepsilon)$, al conjunto de números reales tales que: $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$

El punto a se llama *centro del entorno.*

El entorno de un punto es un intervalo cuyo punto medio es a.

Por tanto:

$$E(a, \varepsilon) =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\quad \text{(Fig. 16)}$$

El entorno del punto a de radio ε pueda expresarse también en forma de *valor absoluto:*

$$E(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid \ |x - a| < \varepsilon\}$$

Nota: Cuando se sobreentiende el punto a, el entorno $E(a, \varepsilon)$ se designa por E_ε.

El entorno del punto 3 y radio 1, es decir, $E(3, 1)$ viene representado en la figura 17.

Si $a = 0$, entonces el entorno $E(0, \varepsilon)$ se escribe de las siguientes formas:

$$-\varepsilon < x < \varepsilon, \quad |x| < \varepsilon,$$

El entorno del punto 3 y radio $\varepsilon = 0{,}1$ se expresa de las siguientes maneras:

$$3 - 0{,}1 < x < 3 + 0{,}1, \quad \text{es decir,} \quad 2{,}9 < x < 3{,}1$$
$$|x - 3| < 0{,}1$$

Utilizando desigualdades o el valor absoluto el entorno $E(-1, 1)$, se puede expresar:

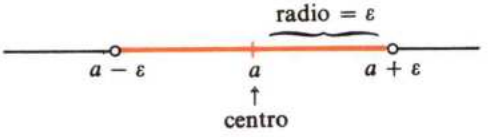
$$-1 - 1 < x < -1 + 1, \quad \text{es decir,} \quad -2 < x < 0$$
$$|x - (-1)| < 1 \quad \text{(Fig. 18)}$$

6.2. Muchas veces interesa considerar el conjunto de puntos de un entorno del punto a excluido el propio punto a. Este entorno recibe el nombre de *entorno reducido de a* y se designará por $E^*(a, \varepsilon)$

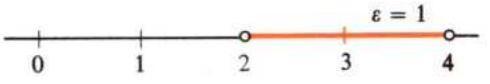
$$E^*(a, \varepsilon) =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[- \{a\} \quad \text{(Fig. 19)}$$

o también: $E^*(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \varepsilon\}$

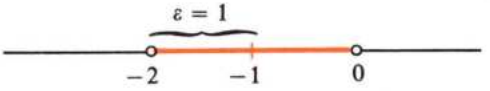
Aquí $x \neq a$, ya que $0 < |x - a|$.



(Fig. 16)



(Fig. 17)



(Fig. 18)

(Fig. 19)

29. Escribe cinco números x que verifiquen la relación $x \in]0{,}9,\ 1{,}1[$.

30. Determina cinco números x que verifiquen la relación $|x - 2| > 0{,}1$

31. Representa el entorno $E(-3, 2)$ utilizando desigualdades y en forma de valor absoluto.

32. Dibuja en la recta real el entorno reducido $E^*(2, 1)$.

33. Expresa de dos maneras un entorno reducido de centro 4 y radio $\frac{1}{2}$.

7 Recta ampliada $\overline{\mathbb{R}}$

7.1. Vamos a ampliar la recta real $\mathbb{R}$ con dos nuevos elementos, que se designarán con los símbolos $-\infty$ y $+\infty$ respectivamente y que llamaremos *menos infinito* y *más infinito.*

El nuevo conjunto se simboliza por $\overline{\mathbb{R}}$. Se tiene por tanto:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

7.2. Se prolonga a $\overline{\mathbb{R}}$ la estructura de orden definida en $\mathbb{R}$, poniendo $-\infty < a$ y $a < +\infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$,

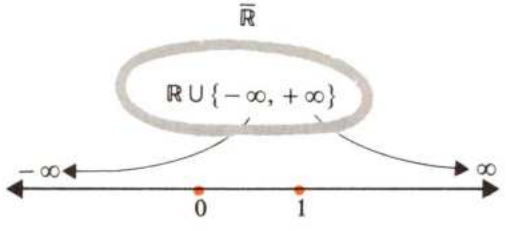
y además $-\infty < +\infty$

Se tiene así un conjunto totalmente ordenado que amplía el orden total de $\mathbb{R}$.

$-\infty$ y $+\infty$ son, respectivamente, el *extremo inferior* y el *extremo superior* del conjunto totalmente ordenado $\mathbb{R}$.

En $\overline{\mathbb{R}}$ todo conjunto de números reales está acotado superior e inferiormente.

7.3. Si completamos la recta r con los puntos $-\infty$ y $+\infty$ (Fig. 20), es decir, si consideramos ampliada la biyección c de $\mathbb{R}$ en r a estos dos nuevos elementos, se obtiene la *recta ampliada.*



(Fig. 20)

8 Entornos de los puntos $-\infty$ y $+\infty$

La definición de entorno dada para los puntos de $\mathbb{R}$ se extiende a la *recta ampliada.*

8.1. Si a es un número real finito, los intervalos $[a, +\infty[$, $]-\infty, a]$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, a[$, contenidos en $\mathbb{R}$, se definen de modo análogo a como se hacía en $\mathbb{R}$.

El conjunto $\mathbb{R}$ como subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}$ es también idéntico al intervalo $]-\infty, +\infty[$.

Los entornos de $+\infty$ y $-\infty$ se definen del modo siguiente:

8.2. *Entornos de* $+\infty$

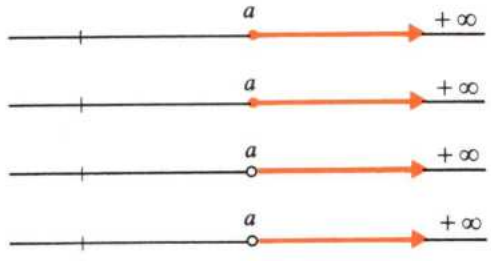
$$[a, +\infty[= \{x \in \bar{\mathbb{R}} \mid a \leqslant x < +\infty\}$$

$$[a, +\infty] = \{x \in \bar{\mathbb{R}} \mid a \leqslant x \leqslant +\infty\}$$

$$]a, +\infty[= \{x \in \bar{\mathbb{R}} \mid a < x < +\infty\}$$

$$]a, +\infty] = \{x \in \bar{\mathbb{R}} \mid a < x \leqslant +\infty\}$$

Su interpretación geométrica en la *recta completa* viene dada en la figura 21.



(Fig. 21)

8.3. *Entornos de* $-\infty$

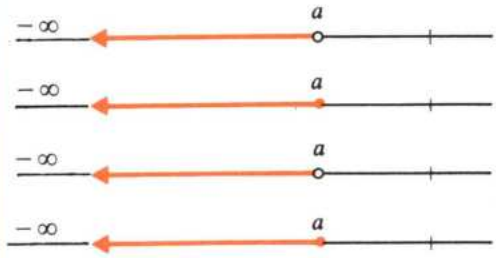
$$]-\infty, a[= \{x \in \bar{\mathbb{R}} \mid -\infty < x < a\}$$

$$]-\infty, a] = \{x \in \bar{\mathbb{R}} \mid -\infty < x \leqslant a\}$$

$$[-\infty, a[= \{x \in \bar{\mathbb{R}} \mid -\infty \leqslant x < a\}$$

$$[-\infty, a] = \{x \in \bar{\mathbb{R}} \mid -\infty \leqslant x \leqslant a\}$$

Su interpretación geométrica en la *recta completa* viene dada en la figura 22.



(Fig. 22)

8.4. Los conjuntos $[-\infty, +\infty]$ y $]-\infty, +\infty[$ representan respectivamente $\bar{\mathbb{R}}$ y $\mathbb{R}$.

34. Explica la diferencia entre

$$[-\infty, +\infty] \text{ y } \{-\infty, +\infty\}$$

35. Representa en una recta los siguientes entornos:

a) $[5, +\infty[$

b) $]-2, +\infty[$

c) $]-\infty, 3]$

d) $]-\infty, -2[$

36. Escribe, mediante desigualdades, los entornos del ejercicio anterior.

Ejercicios y cuestiones

37. Si $= 5$, ordena los números del conjunto $M = \left\{x, -x, \frac{1}{x}, -\frac{1}{x}, \frac{1}{2x}, 1, -1, 0\right\}$

38. Resuelve las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$ y representa el conjunto solución:

a) $2x - 8 \geqslant 6$; b) $\frac{2x+3}{x-1} \geqslant 1$.

39. Dibuja en una recta los siguientes conjuntos:

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid \quad 3 \leqslant x \leqslant 7\}$$
$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leqslant x \leqslant 0\}$$
$$S_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < 1\}$$

40. Demuestra que $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$. ¿En qué caso se verifica $-|x| = x = |x|$?

41. Demuestra que para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ se verifica: $|a + b + c| \leqslant |a| + |b| + |c|$

42. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*$. Prueba que si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

¿Qué sucede cuando $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$?

43. Sean $a, b, c, d, h \in \mathbb{R}_+$. Demuestra que si

$$0 < \frac{a}{b} < 1 < \frac{c}{d}, \quad \text{entonces} \quad 0 < \frac{a}{b} < \frac{a+h}{b+h} < 1 < \frac{c+h}{d+h} < \frac{c}{d}$$

44. Dados los conjuntos $A =]1,2[$, $B =]0,2]$, $C = [1,3]$, se pide:

a) $A \cup B \cup C$; b) $(A \cap B) \cup C$; c) $A \cap B \cap C$; d) $(A \cup B) \cap C$.

45. Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leqslant 5\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x < 7\}$. Halla:

a) $A \cap B$; b) $A \cup B$.

46. Escribe los siguientes entornos mediante el valor absoluto y usando desigualdades:

a) $E(2, 1)$; b) $E(2, 0{,}5)$; c) $E(5, 2)$; d) $E(6, 1)$; e) $E(7, 0{,}1)$.

47. Dibuja en una recta el conjunto de puntos que verifican:

a) $|x| \leqslant 3$; b) $|x| \leqslant 1$; c) $|x| \leqslant 0{,}5$; d) $|x - 1| \leqslant 0{,}5$; e) $|x - 2| \leqslant 1$.

Tema 8 SUCESIONES DE NUMEROS REALES

Las sucesiones de números reales constituyen el ejemplo más sencillo e importante de aplicaciones numéricas. En este tema se estudia primero el conjunto de sucesiones y su representación; en la segunda parte se hace un estudio de su estructura con las operaciones que en él se definen. Finalmente se estudian las sucesiones monótonas y las acotadas.

1 Sucesiones de números reales

1.1. *Se llama sucesión de números reales a toda aplicación de* $\mathbb{N}^*$ *en* $\mathbb{R}$.

El conjunto origen o dominio de la sucesión es $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$.

El conjunto final de la sucesión es $\mathbb{R}$.

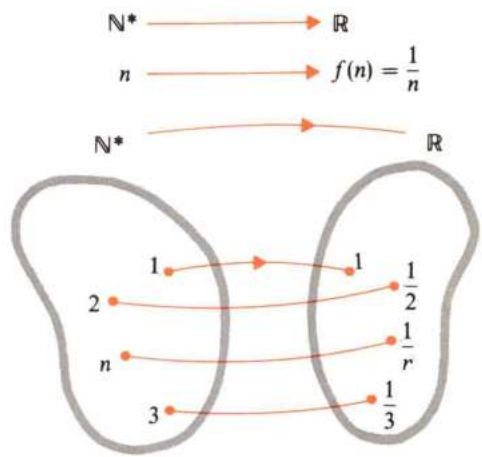
Ejemplos:

- La aplicación f de $\mathbb{N}^*$ en $\mathbb{R}$ definida por $f(n) = \frac{1}{n}$ es una sucesión. Los primeros términos o elementos del conjunto imagen son:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{1}{n} \cdots \quad \text{(Fig. 1)}$$

es decir,

$$f(1) = 1,\ f(2) = \frac{1}{2},\ f(3) = \frac{1}{3},\ f(4) = \frac{1}{4},\ f(5) = \frac{1}{5} \cdots$$



(Fig. 1)

- Dada la sucesión $f(n) = \frac{n^2 + 1}{n + 1}$, se tiene:

$$f(2) = \frac{5}{3}, \quad f(10) = \frac{101}{11}$$

- En la sucesión $f(n) = n^2 + 1$, el original del elemento 10 es 3; es decir, $f^{-1}(10) = 3$, pues si llamamos n_0 al original de 10, se tiene:

$$f(n_0) = n_0^2 + 1 = 10; \quad n_0^2 = 9; \quad n_0 = 3$$

1.2. Como el dominio de una sucesión de números reales es siempre el conjunto $\mathbb{N}^*$, ésta queda determinada por las imágenes $f(1), f(3), f(4), \ldots, f(n), \ldots$

Por eso también se llama *sucesión* al conjunto ordenado de las imágenes de f.

En el caso de las sucesiones se suele emplear la siguiente notación:

La imagen del elemento n, $f(n)$ se designa por f_n. Así las imágenes por f de $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ se designan por

$$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots$$

En la sucesión $f(n) = \dfrac{1}{n}$, las imágenes de $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ son

$$\begin{array}{cccccc} f_1, & f_2, & f_3, & \ldots, & f_n, & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 1, & \dfrac{1}{2}, & \dfrac{1}{3}, & \ldots, & \dfrac{1}{n}, & \ldots \end{array}$$

$f_n = f(n)$ se llama *término n-ésimo* de la sucesión o *término general.*

El conjunto imagen, que determina la sucesión, se designa por $(f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots)$ o más brevemente por (f_n).

1.3. Una sucesión con todos los elementos iguales a r se designará por (r) y se llamará «*la sucesión constante r*».

Ejemplos:

- $(2) = (2, 2, 2, \ldots, 2, \ldots)$ es la sucesión constante 2.
- $(0) = (0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ es la sucesión constante 0.

1.4. El conjunto de las sucesiones de números reales lo designaremos por **S**.

La igualdad de sucesiones en **S** *se define como igualdad de aplicaciones; es decir, si* (a_n) *y* (b_n) *son dos sucesiones,*

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$$

$$(b_n) = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots)$$

$$(a_n) = (b_n) \Longleftrightarrow a_i = b_i \quad \text{para todo} \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

o también: $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, \ldots, a_n = b_n, \ldots$

Ejercicios:

1. Dada la sucesión $f(n) = \dfrac{n^2 + n + 5}{n^3 + 1}$, se pide:

a) $f(7)$

b) $f(1)$

c) $f(11)$

2. Calcula los términos a_5, a_7, a_9 y a_{10} en la sucesión

$$\begin{array}{l} \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longrightarrow a_n = (-1)^n(n^2 + 3) \end{array}$$

3. Escribe los cinco primeros términos de la sucesión

$$\begin{array}{l} \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longrightarrow a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \end{array}$$

4. Dada la sucesión $a : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $a_n = \dfrac{n^2 + 1}{n + 1}$, halla n si $a_n = \dfrac{26}{6}$.

5. Escribe los cinco primeros términos de la sucesión constante (8).

6. Comprueba si son o no iguales las sucesiones (a_n) y (b_n) definidas por

$$\begin{array}{l} a_n = n^2 + 2n + 1 \\ b_n = (n + 1)^2 \end{array}$$

2 Determinación y representación de sucesiones

2.1. Una sucesión (a_n) queda determinada cuando podemos calcular cualquier término a_n.

Hay muchas maneras de definir o determinar una sucesión. Algunas veces los términos de la sucesión siguen una ley matemática conocida, otras veces no.

En la sucesión $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$, el término general es $a_n = \frac{1}{n}$ y se puede calcular inmediatamente cualquier término.

$$a_{100} = \frac{1}{100}, \quad a_{101} = \frac{1}{101}, \ldots$$

Ejemplos:

- La sucesión de los números primos $(2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots)$ no sigue ninguna ley aritmética (conocida hasta ahora). El cálculo de cada término exige el conocimiento de los anteriores.

- La sucesión (a_n) cuyo primer término es 1 y cada uno de los siguientes se obtiene del anterior sumándole 2 tiene por primeros términos $(1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots)$.
  Esta sucesión es la sucesión de los números impares.

- De una sucesión (a_n) se conoce $a_1 = a_2 = 1$, y cada uno de los términos siguientes al a_2 se obtiene sumando los dos anteriores.
  Los primeros términos de esta sucesión son: $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$
  Aquí se conoce un término cuando se conocen los dos anteriores.

- Sea la sucesión $b_n = n^2 + 1$; entonces los cinco primeros términos son: $(2, 5, 10, 17, 26, \ldots)$

2.2. Los ejemplos anteriores nos muestran algunas formas de definir en la práctica las sucesiones.

Generalmente se usan tres maneras distintas para la determinación de una sucesión:

7. Halla el término de lugar diez de la sucesión de los números primos.

8. Halla el término de lugar veinte de la sucesión de los números impares.
(Recuerda que es una progresión aritmética.)

9. El primer término de una sucesión es $a_1 = -1$. Halla los diez primeros términos si $a_n = 2a_{n-1}$, $n \neq 1$.

10. Halla una ley que sigan los siguientes números dados ordenadamente:

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots$$

a) *Por una propiedad característica.*

– La sucesión de los números primos.

– La sucesión de los números pares.

– La sucesión de los números impares.

En la sucesión de los números primos la propiedad es:

«Ser número primo y estar ordenados según la relación «$\leqslant$».

b) *Por una función* o ecuación matemática.

Ejemplos:

- (a_n) donde $a_n = n$
- (b_n) donde $b_n = \dfrac{1}{n}$
- (c_n) donde $c_n = \dfrac{n^2 + n + 1}{n^3 + n}$

Esta forma es la más cómoda para definir una sucesión. Conocido el término general, se conoce inmediatamente cualquier término de la sucesión.

c) *Por una ley de recurrencia.*

Ejemplos:

- La sucesión (a_n) viene dada por $a_1 = 1$, y cada término siguiente es igual al anterior más 2. Entonces:

$$(a_n) = (1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$$

- En una sucesión (a_n).

  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, y los términos siguientes se obtienen sumando los tres anteriores. Entonces la sucesión es

$$(a_n) = (1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, \ldots)$$

- En la sucesión (b_n).

  $b_1 = 1$, y cada uno de los términos siguientes se obtiene multiplicando el anterior por 2. La sucesión es

$$(b_n) = (1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots)$$

11. Escribe los diez primeros términos de la sucesión $(a_n) = \left(\dfrac{n^2 + 1}{n}\right)$.

12. Define la sucesión de los números pares por medio de una ecuación en función de n.

13. Define la sucesión de los números impares por medio de una ecuación en función de n.

14. Define las progresiones aritméticas por una fórmula de recurrencia.

15. Define las progresiones geométricas por una fórmula de recurrencia.

De estos ejemplos se deduce que una ley de recurrencia es una fórmula o criterio que permite conocer un término en función de uno o varios de los anteriores.

2.3. Dada la facilidad con que se manejan y estudian las sucesiones por medio de su término general, puede ser interesante hallarlo cuando no se conoce.

Ejemplos:

- (a_n) es la sucesión de los números pares. Entonces: $(a_n) = (2n)$. El término general es $a_n = 2n$.
- La sucesión $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}\right), \cdots$, formada por los números inversos de los impares mayores que 1, tiene por término general $a_n = \frac{1}{2n+1}$.

2.4. Una sucesión no queda unívocamente determinada si solamente se da un número finito de términos. La sucesión cuyos cuatro primeros términos son 2, 4, 8, 16, ... podría ser la sucesión $a_n = \begin{cases} 2^n & \text{para } n = 1, 2, 3, \text{ y} \\ 8 & \text{para } n = 5, 6, 7, \ldots \end{cases}$

También podrían considerarse los números dados como los cuatro primeros términos de la sucesión $b_n = 2^n$.

La pregunta, ¿cuál es el término general de la sucesión cuyos primeros términos son 5, 7, 9, 11? es ambigua porque tiene infinitas respuestas correctas; así, tres respuestas correctas son las siguientes:

– La sucesión $(a_n) = (5, 7, 9, 11, 6, 6, 6, \ldots)$

– La sucesión $(b_n) = (5, 7, 9, 11, 11, 13, 15, \ldots)$

– La sucesión $(c_n) = (5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \ldots)$, o lo que es lo mismo:

$$a_n = \begin{cases} 5, 7, 9, 11 & \text{para } n = 1, 2, 3, 4 \\ 6 & \text{para } n \geqslant 5 \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 2n + 3 & \text{para } n = 1, 2, 3, 4 \\ 2n + 1 & \text{para } n \geqslant 5 \end{cases}$$

$$c_n = 2n + 3 \text{ para todo } n.$$

A pesar de no tener una respuesta única, resulta muchas veces útil buscar el *término general de sucesiones* que contengan un conjunto ordenado de números.

16. Halla el término general de la siguiente sucesión dada por recurrencia:

$$a_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + 5$$

17. Los siguientes conjuntos ordenados de números son los primeros términos de una sucesión. Halla para cada caso una posible fórmula del término general:

a) 2, 4, 6, 8, 10, ...

b) 2, 6, 10, 14, 18, ...

c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \cdots$

d) $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \cdots$

18. Escribe el término general de las sucesiones

a) $\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{9}{7}, \frac{25}{9}, \cdots$

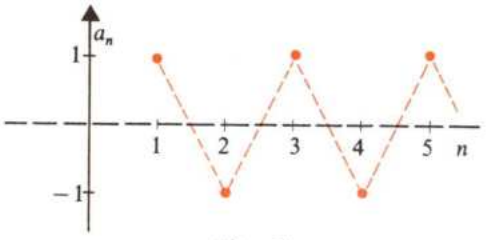
b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots$

2.5. Siendo las sucesiones aplicaciones, se pueden estudiar los mismos métodos de representación que para éstas.

La figura 2 muestra la representación de la sucesión

$$(a_n) = (1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots)$$

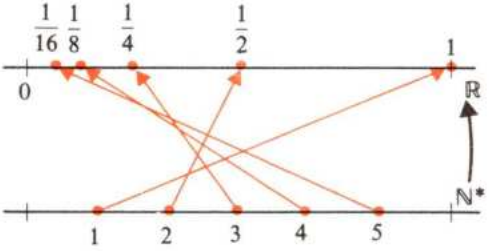
en un diagrama cartesiano.



(Fig. 2)

La figura 3 es un diagrama lineal de la sucesión

$$(a_n) = \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots, \frac{1}{2^{n-1}}, \cdots\right)$$



(Fig. 3)

Como el dominio de la sucesión es siempre el mismo, en la práctica la sucesión (a_n) queda representada en el diagrama lineal por su imagen. (Fig. 4.)

(Fig. 4)

3 Adición de sucesiones

Se define la suma de dos sucesiones (a_n) *y* (b_n)*, y se designa por* $(a_n) + (b_n)$*, como la sucesión dada por* $(a_n + b_n)$

$$\mathbf{(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)}$$

Es decir, la suma de las sucesiones

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$, y

$(b_n) = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots)$, es

$(a_n + b_n) = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots, a_n + b_n, \ldots)$

Siendo la suma de números reales única, lo mismo sucede con la suma de sucesiones, y por tanto, la suma definida en el conjunto **S** de las sucesiones es una operación interna.

Ejemplos:

- La suma de las sucesiones:

  $(a_n) = (0{,}3, 0{,}33, 0{,}333, \ldots, 0{,}33\overset{n}{\ldots}3, \ldots)$

  $(b_n) = (0{,}1, 0{,}16, 0{,}166, \ldots, 0{,}16\overset{n}{\ldots}6, \ldots)$ es

  $(a_n + b_n) = (0{,}4, 0{,}49, 0{,}499, \ldots, 0{,}49\overset{n}{\ldots}9, \ldots)$

- Sea ahora $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ y $(b_n) = \left(\frac{n^2 + 1}{n + 1}\right)$

  entonces la sucesión suma es

$$(a_n + b_n) = \left(\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{n^2 + 1}{n + 1}\right) = \left(\frac{n^3 + 2n + 1}{n(n + 1)}\right)$$

19. Sean las sucesiones

$$(a_n) = \left(\frac{2n + 1}{n}\right) \quad \text{y} \quad (b_n) = \left(\frac{1}{n + 1}\right)$$

Se pide:

a) los cinco primeros términos de

$$(a_n),\ (b_n) \quad \text{y} \quad (a_n + b_n)$$

b) el término general de la sucesión

$$(a_n + b_n)$$

4 Propiedades de la adición de sucesiones

La adición de sucesiones tiene las siguientes propiedades:

4.1. *Propiedad asociativa.*

Dadas las sucesiones (a_n), (b_n), (c_n), se verifica:

$[(a_n) + (b_n)] + (c_n) = +(a_n) + [(b_n) + (c_n)]$, ya que los términos n-ésimos verifican la relación $(a_n + b_n) + c_n = a_n + (b_n + c_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ por la propiedad asociativa de la suma de números reales.

4.2. *Elemento neutro.*

Se llama *sucesión cero*, y se designa por $(0) = (0, 0, 0, \ldots)$, a la sucesión que tiene todos los términos nulos.

Esta sucesión es el elemento neutro de la adición de sucesiones.

20. Demuestra que $(0) + (b_n) = (b_n)$.

4.3. *Elemento opuesto.*

Se llama *sucesión opuesta* de (a_n) y se designa por $-(a_n)$ la sucesión dada por $(-a_n)$, es decir:

$$-(a_n) = (-a_n) = (-a_1, -a_2, -a_3, -a_4, \ldots, -a_n, \ldots)$$

21. Halla la sucesión opuesta de

$$(a_n) = (2n^2 - n + 1)$$

La sucesión $(-a_n)$ es el elemento opuesto de (a_n), ya que

$$(-a_n) + (a_n) = (a_n) + (-a_n) = (a_n + (-a_n)) = (0)$$

La sucesión $(1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots)$ tiene por opuesta

$$(-1, -2, -3, -4, -5, \ldots, -n, \ldots)$$

La sucesión opuesta de $\left(\frac{1}{n}\right)$ es $\left(-\frac{1}{n}\right)$.

4.4. *Propiedad conmutativa.*

Dadas las sucesiones (a_n) y (b_n), se verifica:

$(a_n) + (b_n) = (b_n) + (a_n)$, ya que $a_i + b_i = b_i + a_i \quad \forall_i = 1, 2, 3, \ldots$

por la propiedad conmutativa de la adición de números reales. Por cumplir las propiedades anteriores, el conjunto **S** de las sucesiones reales con la operación adición tiene estructura de grupo conmutativo.

4.5. Por ser $(\mathbf{S}, +)$ grupo, se puede definir la operación opuesta de la adición llamada *sustracción*, de la siguiente forma:

$$\mathbf{(a_n) - (b_n) = (a_n) + (-b_n)}$$

o lo que es lo mismo:

$$(a_n) - (b_n) = (a_n - b_n)$$

Si las sucesiones vienen dadas por

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ y $(n_n) = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots)$,

su diferencia es

$$(a_n) - (b_n) = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3, \ldots, a_n - b_n, \ldots)$$

Ejemplo:

- Si $(a_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right)$ y

  $(b_n) = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \cdots, \frac{1}{n^2}, \cdots\right)$,

  su diferencia es:

$$(a_n) - (b_n) = (a_n - b_n) = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \cdots, \frac{n-1}{n^2}, \cdots\right)$$

22. Sean las sucesiones

$$(a_n) = \left(\frac{2n+1}{n^2}\right) \quad \text{y} \quad (b_n) = \left(\frac{1}{n+1}\right)$$

Comprueba que $(a_n) + (b_n) = (b_n) + (a_n)$.

23. Halla la sucesión diferencia de las sucesiones

$$(a_n) = \left(\frac{n^2 - 2n - 1}{n}\right) \quad \text{y} \quad (b_n) = \left(\frac{2n}{n+1}\right)$$

5 Multiplicación de sucesiones

Se llama *producto de las sucesiones* (a_n) y (b_n), y se designa por $(a_n)\cdot(b_n)$, la sucesión definida por $(a_n \cdot b_n)$ o bien $(a_n b_n)$

$$(\mathbf{a}_n)\cdot(\mathbf{b}_n) = (\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{b}_n)$$

es decir, el producto de las sucesiones

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ y $(b_n) = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots)$ es

$$(a_n b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \ldots, a_n b_n, \ldots)$$

Ejemplos:

- El producto de las sucesiones

  $(a_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{1}{n+1}, \cdots\right)$ y

  $(b_n) = (1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots)$ es:

  $(a_n b_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots\right)$

- Si $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ y $(b_n) = \left(\frac{n^2+1}{n+1}\right)$, entonces la sucesión producto es

  $$(a_n b_n) = \left(\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{n^2+1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2+1}{n+1}\right) = \left(\frac{n^2+1}{n(n+1)}\right)$$

Como el producto de números reales es único, lo mismo sucede con el producto de las sucesiones, luego la multiplicación definida en **S** es una operación interna.

24. Dadas las sucesiones

$$(a_n) = \left(\frac{2n+1}{n}\right) \quad \text{y} \quad (b_n) = \left(\frac{1}{n+1}\right)$$

se pide:

a) el término general de la sucesión producto $(a_n b_n)$.

b) los cinco primeros términos de (a_n), (b_n) y $(a_n b_n)$

6 Propiedades de la multiplicación de sucesiones

La multiplicación de sucesiones tiene las siguientes propiedades:

6.1. *Propiedad asociativa.*

Dadas las sucesiones (a_n), (b_n), (c_n), se verifica:

$[(a_n)\cdot(b_n)]\cdot(c_n) = (a_n)\cdot[(b_n)\cdot(c_n)]$, ya que los términos n-ésimos de las sucesiones verifican la relación $(a_n \cdot b_n)\cdot c_n = a_n \cdot (b_n \cdot c_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ por la propiedad asociativa del producto de números reales.

6.2. *Elemento neutro.*

Se llama *sucesión unidad* o *sucesión uno* la sucesión $(1) = (1, 1, 1, \ldots)$ que tiene todos los elementos iguales a 1.

La sucesión (1) se designa a veces por 1 si no da lugar a confusiones.

Esta sucesión es el elemento neutro para la multiplicación de sucesiones, puesto que

$$(1) \cdot (b_n) = (b_n) \cdot (1) = (b_n \cdot 1) = (b_n)$$

6.3. *Propiedad conmutativa.*

Dadas las sucesiones (a_n) y (b_n), se verifica:

$(a_n) \cdot (b_n) = (b_n) \cdot (a_n)$, ya que $a_i \cdot b_i = b_i \cdot a_i \quad \forall i = 1, 2, 3, \ldots$ por la propiedad conmutativa del producto de números reales.

De lo anterior se deduce que el conjunto **S** de las sucesiones con la operación multiplicación tiene estructura de semigrupo conmutativo con elemento neutro.

6.4. Para ver que $(\mathbf{S}, +, \cdot)$ tiene estructura de anillo, basta demostrar la propiedad distributiva.

Dadas las sucesiones (a_n), (b_n) y (c_n), se verifica que

$$(a_n) \cdot [(b_n) + (c_n)] = (a_n) \cdot (b_n) + (a_n) \cdot (c_n),$$

ya que se verifica la relación $a_n(b_n + c_n) = a_n b_n + a_n c_n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ por la propiedad distributiva de los números reales.

De los apartados anteriores se tiene:

$(\mathbf{S}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo y unitario.

6.5. Dada una sucesión (a_n) cualquiera, no siempre existe otra (b_n) tal que $(a_n) \cdot (b_n) = (1)$.

En efecto, supongamos que se cumple esta relación, entonces $(a_n b_n) = (1)$, de donde $a_n b_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ y $b_n = \dfrac{1}{a_n}$.

Esta igualdad sólo tiene sentido si $a_n \neq 0$. Por tanto no toda sucesión tiene inversa.

25. Dadas las sucesiones

$$(a_n) = \left(\frac{2n + 1}{n^2}\right) \quad \text{y} \quad (b_n) = \left(\frac{1}{n + 1}\right),$$

comprueba que $(a_n) \cdot (b_n) = (b_n) \cdot (a_n)$

Ejemplos:

- La sucesión $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ no tiene inversa, ya que $\frac{1}{0}$ carece de significado.

- La sucesión $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right)$ tiene por inversa $(1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots)$, ya que su producto es la sucesión $(1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots) = (1)$.

6.6. Una sucesión (b_n) es inversible si $b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Como no todas las sucesiones tienen inversa, no se puede definir en general el cociente de dos sucesiones.

Sin embargo, se puede definir este cociente en el caso de que el divisor sea una sucesión inversible. Si (b_n) es una sucesión inversible, se llama cociente de las sucesiones (a_n) y (b_n), y se escribe $\frac{(a_n)}{(b_n)}$, a la sucesión definida por $(a_n) \cdot \left(\frac{1}{b_n}\right)$, o lo que es lo mismo:

$$\frac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

Ejemplos:

- Dadas las sucesiones

  $(a_n) = (1, 3, 5, 7, \ldots, 2n - 1, \ldots)$ y
  $(b_n) = (1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots)$,

  su cociente es: $\frac{a_n}{b_n} = \left(1, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \cdots, \frac{2n-1}{n^2} \cdots\right)$

- Si $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ y $(b_n) = (n^2 + 1)$, entonces su cociente es:

  $$\frac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right) : (n^2 + 1) = \left(\frac{1}{n} : (n^2 + 1)\right) = \left(\frac{1}{n(n^2 + 1)}\right)$$

26. De las siguientes sucesiones indica cuál tiene inversa o es inversible y cuál no.

a) $(a_n) = (7 - 2n)$

b) $(b_n) = (8 - 2n)$

c) $(c_n) = \left(\frac{2n - 8}{3}\right)$

d) $(d_n) = \left(\frac{n^2 - 3n + 2}{3}\right)$

e) $(e_n) = (n^2 - 3n + 2)$

27. En cada una de las sucesiones del ejercicio **26.** indica los términos que no tienen inverso.

28. Sea la sucesión $(a_n) = (-1)^{n+1} - 1$.

a) ¿Es inversible la sucesión?

b) En caso negativo, ¿qué términos no son inversibles?

29. Sea la sucesión $(a_n) = \left(\frac{2n - 4}{n^2 + 3n + 1}\right)$

a) ¿Es (a_n) cociente de las sucesiones $(b_n) = (2n - 4)$ y $(c_n) = (n^2 + 3n + 1)$?

b) ¿Es (a_n) una sucesión inversible?

Razona la contestación.

7 El espacio vectorial de las sucesiones

El conjunto **S** de las sucesiones de números reales se puede dotar de una estructura de espacio vectorial que generaliza la de los espacios numérico $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^n$.

Para ello definiremos el producto de números reales por sucesiones.

7.1. *Se llama producto de la sucesión* $(a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ *por el número real* k, *y se designa por* $k(a_n)$, *la sucesión definida por* (ka_n), *es decir:*

$$\mathbf{k(a_n) = (ka_n) = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n, \ldots)}$$

Siendo el producto ka_n, único, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, se sigue que el producto de una sucesión por un número real es una aplicación de $\mathbb{R} \times \mathbf{S}$ en $\mathbf{S}$, es decir, una operación externa con escalares de $\mathbb{R}$.

Ejemplo:

- Dada la sucesión

$$(a_n) = (1, 3, 5, 7, \ldots, 2n - 1, \ldots)$$

y el número real 3, su producto es:

$$3(a_n) = (3, 9, 15, 21, \ldots, 6n - 3, \ldots)$$

7.2. La operación externa definida tiene las siguientes propiedades:

a) $(k + h)(a_n) = k(a_n) + h(a_n)$

b) $k[(a_n) + (b_n)] = k(a_n) + k(b_n)$

c) $(k \cdot h)(a_n) = k(ha_n)$

d) $1 \cdot (a_n) = (a_n)$

Para todo par de sucesiones (a_n), (b_n) de $\mathbf{S}$ y para todo $k, h \in \mathbb{R}$.

7.3. Demostraremos la primera propiedad de **7.2.** Las demás se dejan como ejercicios fáciles para el alumno.

Para un término cualquiera a_i de la sucesión (a_n) se tiene:

$$(k + h)a_i = ka_i + ha_i$$

por la propiedad distributiva de los números reales; como esto se verifica para todo $i \in \mathbb{N}^*$, se sigue que

$$(k + h)(a_n) = k(a_n) + h(a_n)$$

7.4. Se ha probado ya que $(\mathbf{S}, +)$ es un grupo conmutativo; como la multiplicación por escalares verifica las cuatro propiedades del espacio vectorial, según se ha visto en **7.3.**, resulta que $(\mathbf{S}, +, \cdot\, \mathbb{R})$ es un *espacio vectorial real*, llamado *espacio vectorial de las sucesiones reales.*

30. En la sucesión

$$(a_n) = (1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^{n-1}, \ldots),$$

halla $2(a_n)$.

¿Cuál es el término general de la nueva sucesión?

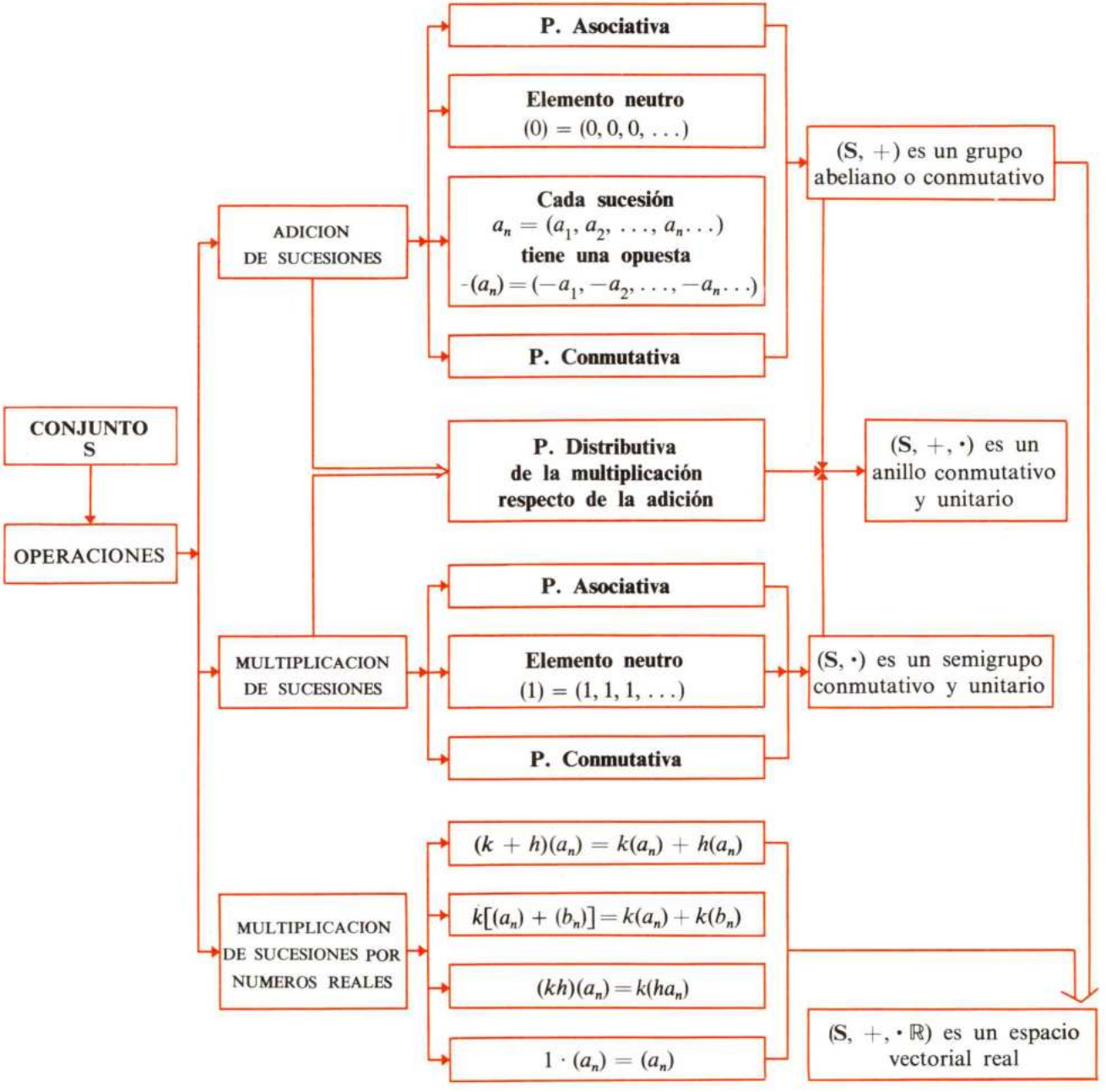
31. Demuestra las propiedades b), c) y d) de **7.2.**

32. Demuestra que se verifica la relación

$$(-1)(a_n) = -(a_n)$$

8 El anillo $(S, +, \cdot)$ y el espacio vectorial $(S, +, \cdot \mathbb{R})$

En el siguiente esquema se resumen las estructuras de *anillo* y de *espacio vectorial* del conjunto **S** de las sucesiones:



9 Sucesiones monótonas

9.1. *Se dice que la sucesión (a_n) de números reales es una sucesión creciente cuando para todo $n \in \mathbb{N}^*$ se verifica que*

$$a_n \leqslant a_{n+1}$$

es decir, cada término de la sucesión es menor o igual que el término que le sigue.

Por tanto, en una sucesión creciente se tiene:

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \cdots$$

La sucesión (a_n) es *estrictamente creciente* cuando para todo $n \in \mathbb{N}^*$ se cumple la relación $a_n < a_{n+1}$, es decir:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$

Ejemplos:

- La sucesión de los número impares

  $$(1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 2n - 1, \ldots)$$

  es una sucesión creciente y estrictamente creciente.

- La sucesión de las sucesivas potencias de 2

  $$(1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots)$$

  es estrictamente creciente. (Fig. 5.)

- La sucesión $(a_n) = \left(\frac{2n}{n+1}\right) = \left(1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \cdots\right)$ es creciente.

  Probemos que $a_n < a_{n+1}$, o lo que es lo mismo, que

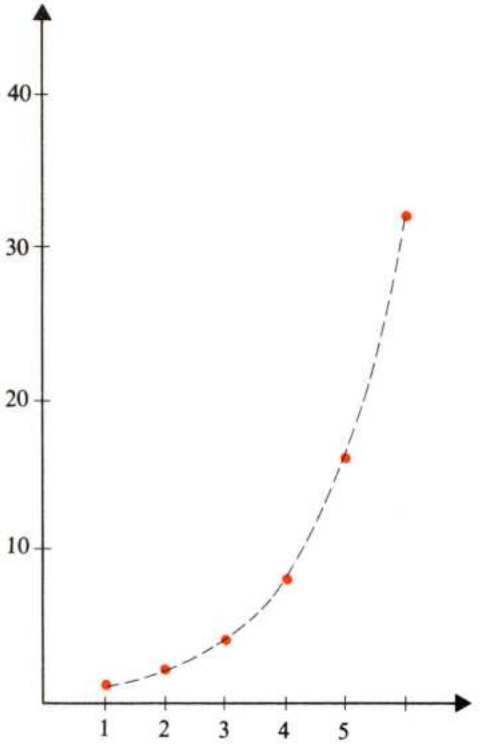
  $$a_{n+1} - a_n > 0$$

  $$\frac{2(n+1)}{(n+1)+1} = \frac{2n+2}{n+2}$$

  $$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{2n}{n+1} =$$

  $$= \frac{2n^2 + 2n + 2n + 2 - 2n^2 - 4n}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{(n+2)(n+1)} > 0$$

  $a_{n+1} - a_n > 0$, ya que en la fracción $\frac{2}{(n+2)(n+1)}$ el denominador es positivo para todo valor natural de n.



(Fig. 5)

33. Demuestra que la sucesión $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ es estrictamente creciente.

34. Escribe o determina tres sucesiones estrictamente crecientes y otras tres crecientes.

35. Demuestra que la sucesión dada por $\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)$ es una sucesión creciente.

9.2. *Se dice que la sucesión* (a_n) *es una sucesión decreciente cuando para todo* $n \in \mathbb{N}^*$ *se verifica que* $a_n \geqslant a_{n+1}$
es decir, cada término de la sucesión es mayor o igual que el término que le sigue.

Por tanto, en una sucesión decreciente, se tiene:

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant \cdots$$

La sucesión (a_n) es *estrictamente decreciente* cuando para todo $n \in \mathbb{N}^*$ se cumple la relación $a_n > a_{n+1}$, es decir:

$$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots$$

Ejemplos:

- La sucesión $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ es una sucesión estrictamente decreciente, ya que

  $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$; como también se cumple $\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{n+1}$

  resulta que (a_n) también es decreciente.

- La sucesión constante $(2) = (2, 2, 2, \ldots, 2, \ldots)$ es una sucesión creciente y decreciente.

9.3. Toda sucesión estrictamente decreciente es decreciente. El recíproco no es cierto.

La sucesión $(a_n) = \left(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \cdots\right)$

es decreciente, pero no estrictamente decreciente.

Análoga observación se puede hacer para las sucesiones crecientes y estrictamente crecientes.

9.4. Se llaman sucesiones monótonas $(\mathbf{S}_M)$ las sucesiones:

- crecientes $(\mathbf{S}_C)$
- estrictamente crecientes $(\mathbf{S}_{EC})$
- decrecientes $(\mathbf{S}_D)$
- estrictamente decrecientes $(\mathbf{S}_{ED})$

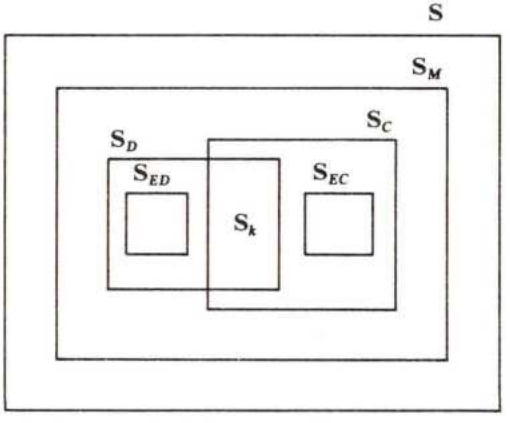
Al margen se ha dibujado un diagrama de Vem que muestra las relaciones entre los diferentes conjuntos de sucesiones monótonas.

36. Demuestra que la sucesión $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ es una sucesión estrictamente decreciente.

37. De las siguientes sucesiones, di cuáles son crecientes o decrecientes:

a) $\left(\frac{1}{n+1}\right)$; b) $\left(\frac{n-1}{1}\right)$

c) $\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$; d) $\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)$



9.5. Si (a_n) es una sucesión creciente, entonces $a_n \leqslant a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Si (a_n) es una sucesión decreciente, entonces $a_n \geqslant a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Por tanto, si la sucesión (a_n) es creciente y decreciente, $a_n = a_{n+1}$ y la sucesión es constante. Luego $\mathbf{S}_D \cap \mathbf{S}_C = \mathbf{S}_k$, siendo $\mathbf{S}_k$ el conjunto de las sucesiones constantes.

9.6. Las sucesiones constantes son las más sencillas y es fácil probar que tiene las siguientes propiedades:

La suma de dos sucesiones constantes es una sucesión constante.

El producto de dos sucesiones constantes es una sucesión constante.

El producto de una sucesión constante por un número real es una sucesión constante.

De aquí resulta:

a) $(\mathbf{S}_k, +, \cdot)$ **es un cuerpo.**

b) $(\mathbf{S}_k, +, \cdot\, \mathbb{R})$ **es un espacio vectorial real.**

9.7. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{S}_k$ la aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbf{S}_k$ definida por

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{S}_k$$
$$f(a) = (a) = (a, a, a, \ldots)$$

Se demuestra fácilmente que

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \quad \text{y que}$$
$$f(ab) = f(a)f(b)$$

es decir que f es un isomorfismo de $\mathbb{R}$ en $\mathbf{S}_k$. Se puede por tanto identificar $\mathbb{R}$ con el subconjunto $\mathbf{S}_k$ de $\mathbf{S}$ y escribir el número real a en lugar de «la sucesión constante (a)». En muchas ocasiones se hace uso de este convenio y los símbolos $7, a, \ldots$ pueden representar tanto a números como a sucesiones.

10 Sucesiones acotadas

10.1. *Se dice que una sucesión (a_n) de números reales está acotada superiormente cuando existe un número real k tal que $a_n \leqslant k$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.*

Ejemplos:

- La sucesión $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ está acotada, ya que todo término es menor que 2, es decir, $\frac{1}{n} < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

- La sucesión $(2n - 1)$ de los números impares no está acotada superiormente, puesto que por grande que sea k

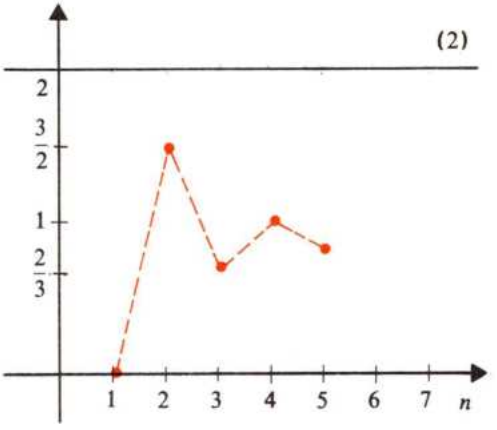
$$2n - 1 > k \text{ siempre que } n > \frac{k+1}{2}$$

En el diagrama cartesiano la sucesión está acotada superiormente cuando su gráfica está por debajo de la gráfica de la sucesión constante $(k) = (k, k, k, \ldots)$.

Así en la figura 6 aparece la gráfica de la sucesión

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} = \left(0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{5}, \cdots\right)$$

que está acotada superiormente.



(Fig. 6)

Gráfica de $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$

10.2. Se dice que una sucesión (a_n) de números reales está *acotada inferiormente* cuando existe un número real k tal que $a_n \geqslant k$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Ejemplos:

- La sucesión $(a_n) = (2n - 1)$ está acotada inferiormente, ya que cualquier término es mayor que -1.

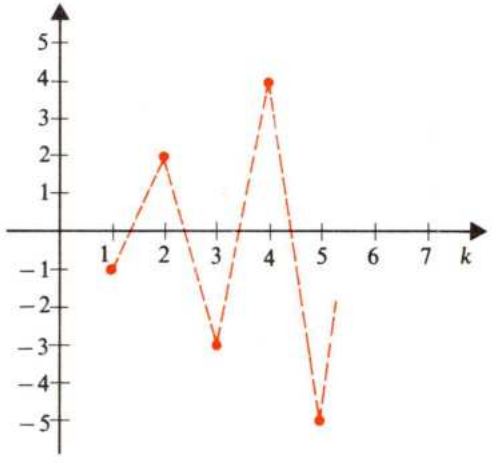
- La sucesión (b_n) dada por $b_n = (-1)^n \cdot n$ no está acotada inferiormente, puesto que existen términos de la sucesión que son menores que cualquier número k dado (Fig. 7).

$$(-1)^n \cdot n = (-1, 2, -3, 4, -5, \ldots)$$

En el diagrama cartesiano se reconoce que una sucesión está acotada inferiormente cuando su gráfica está por encima de la gráfica de la sucesión constante $(k) = (k, k, k, \ldots)$

10.3. Una sucesión (a_n) de números reales que está *acotada superior e inferiormente* se dice que es una *sucesión acotada*, es decir, existen dos números k y k' tales que

$$k \leqslant a_n \leqslant k' \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$



(Fig. 7)

Ejemplos:

- La sucesión $(2n - 1)$ está acotada inferiormente por 0, pero no está acotada superiormente.
- La sucesión $(-2n) = (-2, -4, -8, -16, \ldots)$ está acotada superiormente por 1, pero no está acotada inferiormente.

10.4. Una definición equivalente a la anterior, y que en la práctica se usa, es la siguiente:

La sucesión (a_n) está acotada si existe un número real $k > 0$ tal que $|a_n| \leqslant k$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

La equivalencia de ambas definiciones puede verse en el apartado **4.4.** del tema 7.

Designaremos por $\mathbf{S}_A$ el conjunto de las sucesiones acotadas.

10.5. *La suma de dos sucesiones acotadas es una sucesión acotada.*

Si (a_n) y (b_n) son sucesiones acotadas, entonces existen dos números k y k' tales que

$|a_n| \leqslant k$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ y $|b_n| \leqslant k'$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$

De $|a_n + b_n| < |a_n| + |b_n| \leqslant k + k'$ se sigue que $(a_n + b_n)$ es una sucesión acotada.

10.6. *El producto de dos sucesiones acotadas es una sucesión acotada.*

Si (a_n) y (b_n) son sucesiones acotadas, entonces existen dos números k y k' tales que

$|a_n| \leqslant k$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ y $|b_n| \leqslant k'$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$

$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leqslant kk'$, esto nos dice que kk' es una cota de la sucesión $(a_n b_n)$, luego $(a_n b_n)$ es una sucesión acotada.

Como consecuencia de esta propiedad resulta que:

El producto de una sucesión acotada por un número real es una sucesión acotada.

De lo visto anteriormente resulta:

a) **La terna $(\mathbf{S}_A, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo y unitario.**

b) **La terna $(\mathbf{S}_A, +, \cdot\ \mathbb{R})$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.**

38. Demuestra que la sucesión $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ está acotada superiormente. Escribe cinco cotas superiores de esta sucesión.

39. Toda sucesión decreciente está acotada superiormente. ¿Es cierto? Razona la contestación.

40. Demuestra que la sucesión $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ está acotada inferiormente.

41. Toda sucesión creciente está acotada inferiormente. ¿Es cierto? Razona la contestación.

42. Halla una cota superior de la sucesión $\left(\frac{n}{n+1}\right)$. Comprueba también que para todo $n \in \mathbb{N}^*$

$$-5 < a_n < 5$$

43. De las siguientes sucesiones, di cuáles están acotadas y cuáles no:

a) $\left(\frac{n-1}{n}\right)$

b) (2^{n-1})

c) $(-1)^n - 1$

Ejercicios y cuestiones

44. Demuestra que la sucesión $(a_n) = \left(\frac{2n-3}{n+1}\right)$ es creciente probando que $a_{n+1} - a_n > 0$.

45. Demuestra que 2 o cualquier número mayor que 2 es una cota de la sucesión $(a_n) = \left(\frac{2n-3}{n+1}\right)$

46. De las siguientes afirmaciones indica las que son verdaderas y las que son falsas:

a) El producto de una sucesión acotada por una sucesión cualquiera es una sucesión acotada.

b) Toda sucesión estrictamente decreciente es decreciente.

c) Toda sucesión constante es acotada.

d) Toda sucesión acotada es constante.

47. Demuestra que la aplicación $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{S}_k$ definida por $f(a) = (a) = (a, a, a, \ldots, a \ldots)$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}$ en $\mathbf{S}_k$.

48. Halla tres sucesiones cuyos primeros términos sean: 1, 3, 5, 7, 9, ...

49. Comprueba que los términos $\frac{1+a}{1+b}, \frac{a+2}{1+b}, \frac{a+3}{1+b}, \cdots$, están en progresión aritmética. Halla el término décimo y el vigésimo.

50. Escribe ocho términos de las sucesiones cuya ley de formación viene expresada por las siguientes leyes de recurrencia:

a) $a_n = a_{n-1} + 2,\ a_1 = 1$

b) $a_n = 1 - 2a_{n-1},\ a_1 = 0$

c) $a_n = a_{n-2} + a_{n-1},\ a_1 = a_2 = 1$

d) $a_n = a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1},\ a_1 = a_2 = a_3 = 1$

51. Halla el término general de una sucesión que contenga a

a) $\frac{1^2}{3}, \frac{2^2}{6}, \frac{3^2}{11}, \frac{4^2}{18}, \cdots$ b) $\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, \frac{16}{17}$.

52. Se considera un cuadrado. Si se unen los puntos medios de los lados se obtiene un nuevo cuadrado.

Si en éste unimos nuevamente los puntos medios se obtiene un nuevo cuadrado, y así sucesivamente. Se pide:

a) El término general de la sucesión que da las longitudes de los lados.

b) ¿Qué clase de sucesión es la de las longitudes de los lados?

c) El término general de la sucesión que da las áreas de los sucesivos cuadrados.

Tema 9 SUCESIONES CONVERGENTES

La primera parte de este tema está dedicada a estudiar, desde un punto de vista intuitivo, las ideas que llevan al concepto de límite de una sucesión; después se da la definición rigurosa de límite seguida de varios ejemplos que ayudan a la comprensión de este concepto.

Las propiedades de los límites que se estudiarán aquí permitirán en el tema siguiente el cálculo efectivo de límites.

1 Idea intuitiva de límite de una sucesión

1.1. En la sucesión

$$(0{,}3,\ 0{,}33,\ 0{,}333,\ \ldots,\ 0{,}33\overset{n}{\ldots}3,\ \ldots) \qquad [1]$$

sus términos se aproximan cada vez más al número racional $\frac{1}{3}$; se suele decir que los términos de esta sucesión tienden o se aproximan al número $\frac{1}{3}$.

Este número se dice que es el límite de la sucesión [1].

1.2. En la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right)$ cada término es una aproximación mejor que el anterior del número 0. Si n se hace *muy grande*, la diferencia entre 0 y $\frac{1}{n}$ se hace *muy pequeña*. Diremos que el *límite* de la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ es cero.

1.3. Los términos de la sucesión

$$(0{,}9,\ 0{,}99,\ 0{,}999,\ \ldots,\ 0{,}99\overset{n}{\ldots}9,\ \ldots)$$

se aproximan cada vez más al número 1.

Este número es el *límite* de dicha sucesión.

Ejercicios:

1. ¿A qué número racional se aproximan los términos de la sucesión

$$(0{,}6,\ 0{,}66,\ 0{,}666,\ 0{,}6666,\ \ldots)?$$

2. ¿A qué número racional se aproximan los términos de la sucesión

$$(0{,}4,\ 0{,}49,\ 0{,}499,\ 0{,}4999,\ \ldots)?$$

3. Escribe una sucesión cuyos términos se aproximen a 7.

4. Dado el número racional $0{,}\widehat{12}$, halla el número racional en forma de fracción.

Indicación: En la igualdad $x = 0{,}121212\ldots$ multiplica por 100 y resta de la igualdad obtenida la dada.

1.4. La sucesión $\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots\right)$ tiene por límite el número 1. Si n se hace *muy grande*, $\frac{n}{n+1}$ se aproxima cada vez más a 1.

Así, para $n = 1.000$, entonces $\frac{1.000}{1.001} = 0{,}9990009$

$n = 100.000$, entonces $\frac{100.000}{100.001} = 0{,}99999$

1.5. Los ejemplos anteriores nos permiten dar una definición provisional e intuitiva de límite de una sucesión.

Decir que el número a es el límite de la sucesión (a_n) equivale a decir que si n va tomando valores cada vez mayores, entonces los términos de la sucesión se aproximan cada vez más al número a.

La figura 1 muestra la gráfica de la sucesión (0,3, 0,33, 0,333, ...).

Se observa que cuando n crece, los puntos (n, a_n) de la gráfica se acercan cada vez más a la recta $y = \frac{1}{3}$.

La gráfica de la sucesión $(2^{n-1}) = (1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots)$ de la figura 2 muestra cómo los puntos (n, a_n) se alejan cada vez más sin aproximarse a ninguna recta $y = a$ como sucede en el ejemplo anterior; diremos que esta sucesión no tiene límite.

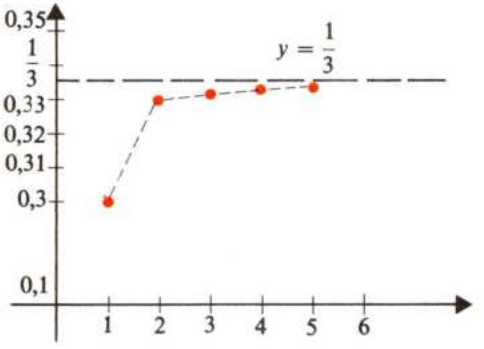
La sucesión $\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ tiene por límite 1. Los términos $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \cdots\right)$, según se ve en la figura 3, se aproximan cada vez más al número 1.

1.6. Sean a, x, ε tres números reales con $\varepsilon > 0$. Se dice que «x es un valor aproximado de a con error menor que ε» cuando x verifica la relación

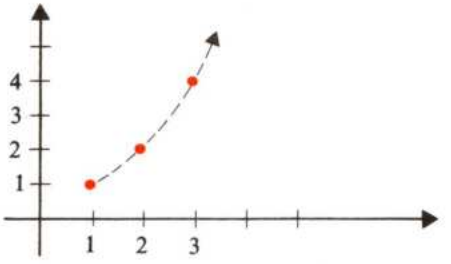
$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$$

La primera consecuencia deducida de aquí es que para asegurar que el término de la sucesión a_n está próximo o no al límite a tenemos que dar la cota de error ε, es decir, *un término a_n de la sucesión (a_n) está próximo al límite a de la sucesión con error menor que un número dado ε cuando*

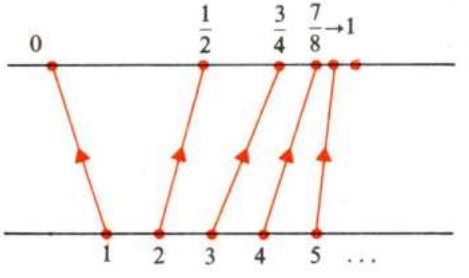
$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \text{(Fig. 4)}$$



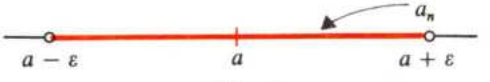
(Fig. 1)



(Fig. 2)



(Fig. 3)



(Fig. 4)

Ejemplos:

- En la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ si $\varepsilon = 0{,}01$, entonces el término $\frac{1}{101}$ está próximo a 0, con error menor que 0,01, ya que

$$-\frac{1}{100} < \frac{1}{101} < \frac{1}{100}$$

y lo mismo sucede para todos los siguientes a partir del término de lugar $n = 101$.

- La sucesión $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ tiene términos que se aproximan a 1 con error menor que $\varepsilon = 10^{-6}$. En efecto, basta tomar n de modo que $1 - \frac{n}{n+1} < 10^{-6}$

Esta desigualdad es equivalente a:

$$\frac{n+1-n}{n+1} < \frac{1}{10^6} \iff n+1 > 10^6 \iff n > 10^6 - 1$$

Por tanto, si $n > 10^6 - 1$, la diferencia entre cualquier término de la sucesión y el número 1 es menor que $\varepsilon = 10^{-6}$.

1.7. Intuitivamente vemos también que la idea de límite de una sucesión lleva implícito que, *para cualquier ε que prefijemos, existen términos de la sucesión que están dentro del entorno* $]a - \varepsilon,\ a + \varepsilon[$

No solamente deben estar en ese entorno *algunos términos*, sino *todos los siguientes a partir de uno dado* que llamaremos a_{n_0}.

Ejemplo:

- La sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ tiene límite 0, ya que para todo ε se puede determinar un término a_{n_0} tal que a partir de él todos los siguientes están en el entorno $]0 - \varepsilon,\ 0 + \varepsilon[$. Este término a_{n_0} depende de ε, como se ve a continuación.

Si $\varepsilon = \frac{1}{10}$, el término a_{n_0} es a_{10}, ya que $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$, para todo $n > 10$.

Si $\varepsilon = \frac{1}{100}$, el término a_{n_0} es a_{100}, ya que $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$, para todo $n > 100$.

Si $\varepsilon = 10^{-6}$, el término a_{n_0} es $a_{1.000.000}$, ya que $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$, para todo $n > 1.000.000$.

5. Halla el término a_{n_0} de la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ tal que a partir de él los siguientes están dentro del entorno $]-10^{-3},\ 10^{-3}[$.

6. Indica qué números te parecen límites de las siguientes sucesiones:

a) $\left(\frac{1}{n}\right)$; b) $\left(\frac{1}{n^2}\right)$; c) $\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

7. Dada la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$, halla el término a_{n_0} de la sucesión a partir del cual los siguientes están dentro del entorno

$$]0 - 10^{-4},\ 0 + 10^{-4}[$$

8. Dada la sucesión $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ y $\varepsilon = 10^{-4}$, halla el número natural n_0 tal que se verifique:

$$-\frac{1}{10^4} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{10^4} \quad \text{para todo } n > n_0$$

1.8. Consideremos la sucesión $(a_n) = \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ cuyos primeros términos son $(a_n) = \left(2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\right)$.

Para ver que 1 es el límite se tiene que demostrar que, fijado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un término a_{n_0} de la sucesión tal que a partir de él todos los siguientes están en el entorno

$$]1 - \varepsilon,\ 1 + \varepsilon[$$

Si tomamos $\varepsilon = 0{,}5$ en la figura 5 se ve que los únicos puntos de la gráfica que no están dentro del entorno de aproximación $]1 - 0{,}5, 1 + 0{,}5[$ son los correspondientes a $n = 1$ y $n = 2$. Para $n > 2$ se verifica que:

$$a_n \in]1 - 0{,}5,\ 1 + 0{,}5[$$

Por tanto, aquí el valor de n_0 es $n_0 = 2$.

Si tomamos $\varepsilon = 0{,}1$, en la figura 6 se observa que los únicos puntos que no están dentro del entorno de aproximación $]1 - 0{,}1, 1 + 0{,}1[$ son los correspondientes a $n = 1, 2, \ldots, 10$.

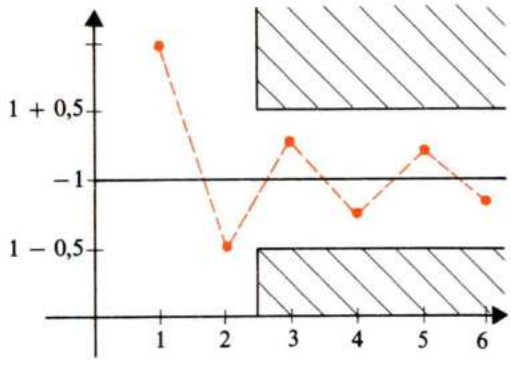
Para $n > 10$ se verifica que:

$$a_n \in]1 - 0{,}1,\ 1 + 0{,}1[$$

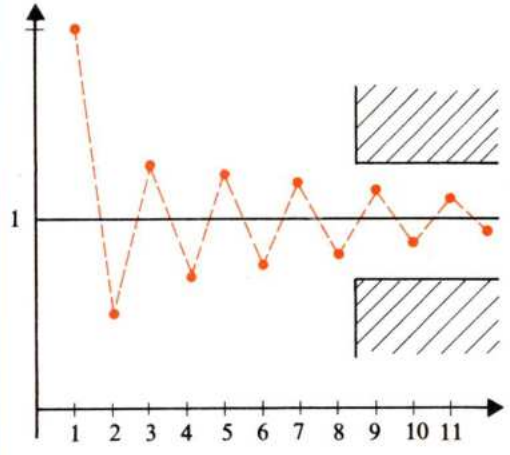
aquí el valor de n_0 es $n_0 = 10$.

Se observa de nuevo que el número n_0 depende de ε.

Las figuras 5 y 6 nos permiten intuir que si la *banda de aproximación* determinada por las rectas $y = 1 + \varepsilon$, $y = 1 - \varepsilon$ se reduce (se hace más estrecha), el término a_{n_0}, a partir del cual los puntos están dentro de esa banda, es cada vez mayor.



(Fig. 5)



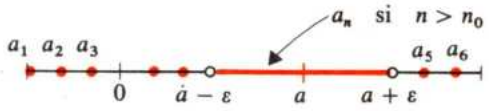
(Fig. 6)

2 Definición de límite. Sucesiones convergentes

El estudio realizado en el epígrafe anterior nos acerca a la definición rigurosa de límite.

2.1. *El número real a es límite de la sucesión (a_n), y se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, cuando para todo número real positivo ε existe un término a_{n_0} de la sucesión a partir del cual todos los términos siguientes están en el entorno $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ del punto a.*

O también: *el límite de la sucesión* (a_n) *es a cuando para todo número real positivo* ε *se puede determinar un número natural* n_0 *tal que siempre que* $n > n_0$, a_n *está en un entorno de centro a y radio* ε, $E(a, \varepsilon)$ (Fig. 7).



(Fig. 7)

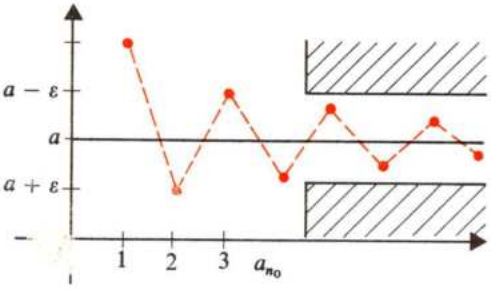
La figura 8 muestra la interpretación geométrica del límite de una sucesión en un diagrama cartesiano.

Si consideramos la *banda de aproximación* dada por $y = a + \varepsilon$, $y = a - \varepsilon$, entonces *todos los puntos* de la gráfica de la sucesión están en ella a partir del término a_{n_0} en adelante.

Si $a_n \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, entonces se tiene que

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

esto nos permite dar otra definición equivalente de límite.



(Fig. 8)

Se dice que la sucesión (a_n) *tiene por límite a cuando para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe un número natural* n_0 *tal que siempre que* $n > n_0$, *se verifica* $|a_n - a| < \varepsilon$.

Ejemplos:

- La sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ tiene por límite 0.

  La definición exige demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural positivo n_0 tal que si $n > n_0$, entonces

  $$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon.$$

  Siendo $\frac{1}{n} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, la desigualdad $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ es equivalente a $\frac{1}{n} < \varepsilon$, es decir: $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

  Si $\varepsilon = 10$, entonces $n > \frac{1}{10}$ se verifica para $n > n_0 = 10$.

  Si $\varepsilon = 10^{-3}$, entonces $n > \frac{1}{10^{-3}} = 10^3$ se verifica para $n > n_0 = 1.000$.

  Es evidente que para todo $\varepsilon > 0$ se puede hallar n_0, tomando $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, siendo $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ la parte entera del número real $\frac{1}{\varepsilon}$.

  Por tanto, $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

9. Halla el número n_0 a partir del cual los términos a_n de la sucesión $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ están en el entorno $]-10^{-6}, 10^{-6}[$ del punto 0.

10. Comprueba que la sucesión $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ tiene por límite 0.

- El límite de la sucesión $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ es 1.

  Se trata de ver que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que

  $$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon \quad \text{siempre que } n > n_0$$

  Como $\frac{n+1}{n} > 1$, se verifica $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{n+1}{n} - 1$ y se tienen las siguientes desigualdades equivalentes:

  $$\frac{n+1}{n} - 1 < \varepsilon \iff \frac{n+1-n}{n} < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$$

  Lo mismo que en el ejemplo anterior, se puede tomar

  $$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1, \quad \text{así:}$$

  si $\varepsilon = 0{,}5$, entonces $n_0 = \left[\frac{1}{0{,}5}\right] + 1 = 2 + 1 = 3.$

  si $\varepsilon = \frac{1}{3}$, entonces $n_0 = \left[\frac{1}{\frac{1}{3}}\right] + 1 = 3 + 1 = 4$

  si $\varepsilon = 0{,}12$, entonces $n_0 = \left[\frac{1}{0{,}12}\right] + 1 = [8{,}3] + 1 = 8 + 1 = 9.$

- La sucesión $(7) = (7, 7, 7, 7, \ldots)$ es evidente que tiene por límite 7, pues cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, $|a_n - 7| = |7 - 7| = 0 < \varepsilon$.

2.2. *Se llaman sucesiones convergentes aquellas que tienen límite.*

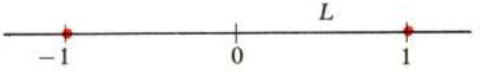
El conjunto de las sucesiones convergentes se designa por $\mathbf{S}_C$.

Ejemplos:

- La sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ es una sucesión convergente, ya que tiene límite

  $$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

- La sucesión $(1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots)$ no es una sucesión convergente, pues no tiene límite, ya que fijado un ε, por ejemplo $\varepsilon = 0{,}1$, no hay ningún punto L que sea centro de un entorno de radio $\varepsilon = 0{,}1$ y que contenga a la vez a 1 y -1 (Fig. 9).



(Fig. 9)

11. Dada la sucesión $\left(\frac{n+1}{n}\right)$, se pide:

a) escribir los diez primeros términos de la sucesión,

b) representar en un diagrama cartesiano la sucesión,

c) sabiendo que $\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, hallar n_0 si $\varepsilon = \frac{1}{10^4}$.

2.3. La definición de límite se puede expresar simbólicamente del modo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ |a_n - a| < \varepsilon,\ \forall n > n_0$$

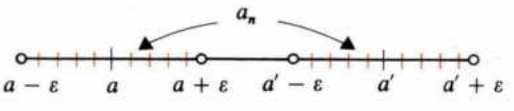
12. a) Escribe tres sucesiones convergentes.

b) Escribe tres sucesiones *no* convergentes.

3 Propiedades de los límites

3.1. *El límite de una sucesión convergente es único.*

En la figura 10 se ha esquematizado la idea de la demostración. Supongamos que una sucesión (a_n) tiene dos límites a y a', $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $a' = \lim_{n\to\infty} a_n$. Uno de los dos números será menor que el otro; supongamos que $a < a'$. Si tomamos $\varepsilon = \dfrac{a' - a}{3}$, los intervalos $]a - \varepsilon,\ a + \varepsilon[$ y $]a' - \varepsilon,\ a' + \varepsilon[$ no tienen ningún punto común.



(Fig. 10)

Por ser $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, existe un $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tal que si $n > n_1$ todos los términos a_n están en el intervalo $]a - \varepsilon,\ a + \varepsilon[$; y si $a' = \lim_{n\to\infty} a_n$, existe también un $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tal que si $n > n_2$ todos los términos a_n están en el intervalo $]a' - \varepsilon,\ a' + \varepsilon[$.

Por tanto, tomando $n > \text{máx}\,\{n_1, n_2\}$, todos los términos de la sucesión deben de estar en el intervalo $]a' - \varepsilon,\ a' + \varepsilon[$ y $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, lo cual es imposible, ya que estos intervalos no tienen ningún punto en común.

Luego una sucesión no puede tener más de un límite.

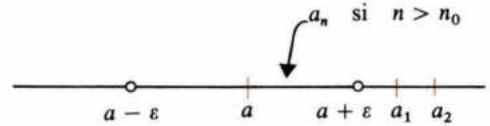
3.2. *Toda sucesión convergente está acotada.*

En efecto, sea (a_n) una sucesión convergente cuyo límite es a.

Según la definición de límite, fijado $\varepsilon > 0$, existe un número natural n_0 tal que siempre que $n > n_0$ todos los términos a_n están en el entorno $]a - \varepsilon,\ a + \varepsilon[$.

Fuera de ese entorno quedan a lo sumo los términos

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n_0} \qquad \text{(Fig. 11)}$$



(Fig. 11)

Una cota superior de la sucesión (a_n) sería el

$$\text{máx}\,(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n_0}, a + \varepsilon)$$

Una cota inferior de la sucesión (a_n) sería el

$$\text{mín}\,(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n_0}, a - \varepsilon)$$

Luego la sucesión (a_n) está acotada.

13. ¿Tiene límite la sucesión definida por

$$a_n = (-1)^n(3) = (-3, 3, -3, 3, \ldots)?$$

Razona tu contestación.

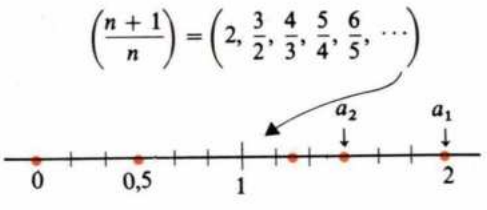
Ejemplo:

- La sucesión $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ tiene por límite 1, según se ha visto.

  Una cota superior es el máx $\left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots 1 + 0{,}5\right\} = 2.$

  Una cota inferior es el mín $\left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots 1 - 0{,}5\right\} = 0{,}5.$

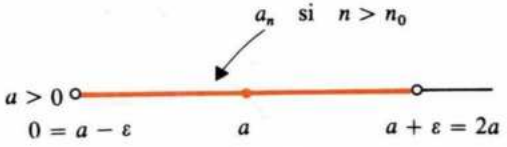
  (Fig. 12)



(Fig. 12)

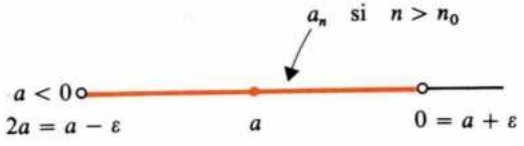
3.3. *Si* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *y* $a \neq 0$, *entonces existe un* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *tal que* $\operatorname{sig}(a_n) = \operatorname{sig}(a)$ *siempre que* $n > n_0$; *es decir, a partir de un cierto término* a_{n_0} *todos los siguientes tienen el mismo signo que el límite.*

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$, se toma $\varepsilon = a$. A partir de un cierto término a_{n_0} todos los siguientes estarán dentro del entorno $]0,2a[$, luego son todos positivos lo mismo que a. (Fig. 13.)



(Fig. 13)

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a < 0$, se toma $\varepsilon = |a| = -a$. A partir de un cierto término todos los siguientes estarán dentro del entorno $]2a, 0[$, luego son todos negativos lo mismo que a. (Fig. 14.)



(Fig. 14)

3.4. Una consecuencia inmediata de esta propiedad es la siguiente:

Si una sucesión convergente tiene infinitos términos positivos e infinitos negativos, tiene por límite cero.

En caso contrario, el límite sería positivo o negativo distinto de cero y, por la propiedad anterior, a partir de un término en adelante *todos serían positivos o todos serían negativos*, en contra del enunciado.

Ejemplos:

- En la sucesión $(a_n) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} =$

  $$= \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \cdots\right),$$

  hay infinitos términos positivos e infinitos negativos.

  Si tiene límite, éste será 0, como así sucede.

- En la sucesión $(b_n) = ((-1)^{n+1} \cdot n) = (1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots)$, hay también infinitos términos positivos e infinitos negativos.

  En este caso la sucesión carece de límite.

14. Escribe una sucesión convergente que tenga infinitos términos positivos e infinitos negativos. ¿Cuál es su límite?

15. Escribe una sucesión no convergente que tenga infinitos términos positivos e infinitos negativos.

3.5. Si (a_n) y (b_n) son dos sucesiones tales que $a_n \leqslant b_n$, con $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, entonces: $a \leqslant b$.

Probemos que suponer $a > b$ nos lleva a una contradicción con la hipótesis.

Si $a > b$, entonces $a - b > 0$ y los términos de la sucesión $(a_n - b_n)$ tendrían el mismo signo que su límite $(a - b)$, a partir de un cierto $n_0 \in \mathbb{N}^*$ (propiedad **3.3.**); es decir: $a_n - b_n > 0$ para todo $n > n_0$, o lo que es lo mismo, $a_n > b_n$ para todo $n > n_0$. Este resultado está en contradicción con lo que habíamos supuesto en el enunciado, luego $a \leqslant b$.

3.6. Sean (a_n), (b_n) y (c_n) tres sucesiones tales que

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$

b) $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$.

Entonces $\lim_{n\to\infty} c_n = L$.

En efecto: si llamamos $c = \lim_{n\to\infty} c_n$, aplicando la propiedad **3.5.**, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l}\text{por ser } a_n \leqslant c_n \implies L \leqslant c \\ \text{por ser } c_n \leqslant b_n \implies c \leqslant L\end{array}\right\} \implies c = L = \lim_{n\to\infty} c_n$$

4 Adición de sucesiones convergentes. El grupo $(S_L, +)$

4.1. *Si (a_n) y (b_n) son dos sucesiones convergentes de números reales con* ***límite*** *a y b* ***respectivamente,*** *la sucesión $(a_n + b_n)$ es* ***convergente*** *y* ***tiene por límite*** *$a + b$.*

En efecto:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \implies \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^* |,\ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\, n > n_0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \implies \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_1 \in \mathbb{N}^* |,\ |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\, n > n_1$$

Entonces

$$|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \overset{①}{\leqslant}$$
$$\leqslant |a_n - a| + |b_n - b| \overset{②}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Se observa que:

La desigualdad ① se verifica para cualquier valor de n, pero la ② sólo es cierta para los n que sean mayores que el máximo de n_0 y n_1; es decir: para todo n mayor que máx $\{n_0, n_1\}$ se verifica: $|a_n + b_n - (a + b)| < \varepsilon$, de aquí se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b) = a + b = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

Ejemplo:

- Las sucesiones (0,3, 0,33, 0,333, ...) y (0,6, 0,66, 0,666, ...) tienen por límite $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ respectivamente.

  Su suma (0,9, 0,99, 0,999, ...) tiene por límite $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$.

En el siguiente ejemplo se hace uso del teorema anterior.

Ejemplo:

- $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2}\right) \overset{①}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \overset{②}{=}$

  $= \lim_{n\to\infty} (1) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + 0 + 0 = 1.$

En ① se ha aplicado la propiedad distributiva del cociente respecto de la suma, y en ②, el teorema del límite de la suma.

Nota: Dos sucesiones pueden ser no convergentes y sí ser convergente su suma.

Ejemplo:

- Las sucesiones $(1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots)$ y
  $$(-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots)$$
  no tienen límite, sin embargo, su suma $(0, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ tiene por límite 0.

4.2. *Si (a_n) tiene por límite a, entonces la sucesión opuesta $(-a_n)$ tiene por límite $-a$,* es decir,

$$\lim_{n\to\infty} (-a_n) = -\lim_{n\to\infty} a_n$$

Ejemplo:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$, y $\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{n-1}{n}\right) = -1.$

16. Halla el límite de la sucesión $(a_n) = \left(\frac{n+7}{n}\right)$ aplicando el teorema del límite de la suma.

17. Demuestra que el límite de $\left(\frac{k}{n}\right)$, donde k es un número natural >1, es 0.

Indicación: $\frac{k}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \overset{k}{\cdots} + \frac{1}{n}$

18. Escribe dos sucesiones no convergentes tales que su suma sí lo sea.

19. Demuestra la propiedad **4.2.**

4.3. Si (a_n) y (b_n) tienen por límites a y b respectivamente, entonces $(a_n - b_n)$ tiene por límite $a - b$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

Ejemplo:

- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n-2}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}(1) - \lim_{n\to\infty}\dfrac{2}{n} = 1 - 0 = 1$

4.4. De lo visto anteriormente se tiene que el conjunto de las sucesiones convergentes con la operación suma tiene estructura de grupo conmutativo, es decir, el par $(\mathbf{S}_L, +)$ es un grupo conmutativo.

20. Demuestra como aplicación de las prodades **4.1.** y **4.2.** la propiedad **4.3.**

Recuerda que $a_n - b_n = a_n + (-b_n)$.

21. Teniendo en cuenta que los límites de $\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ y $\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ son 0, halla el límite de la sucesión

$$\left(\frac{n^3 + n^2 - n - 7}{n^3}\right)$$

5 Multiplicación de sucesiones convergentes

Se puede demostrar como se hizo en **4.1.** que:

5.1. *Si (a_n) y (b_n) son dos sucesiones convergentes de números reales cuyos límites son a y b respectivamente, la sucesión $(a_n \cdot b_n)$ es convergente y tiene por límite $a \cdot b$,* es decir,

$$\text{Si } \begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n = a \\ \lim_{n\to\infty} b_n = b \end{cases}, \quad \text{entonces } \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

Ejemplos:

- Las sucesiones (0,3, 0,33, 0,333, ...) y (0,6, 0,66, 0,666, ...) tienen por límite $\dfrac{1}{3}$ y $\dfrac{2}{3}$, respectivamente.

  Su producto (0,18, 0,2178, 0,221778, 0,2221777, ...)

  tiene por límite $0{,}2222\ldots = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9}$.

- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n-1)}{n\cdot n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1 \cdot 1 = 1$

22. Halla el límite de la sucesión $\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+n}\right)$ descomponiéndola en producto de dos sucesiones de límites conocidos.

23. Si $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ demuestra, como aplicación del teorema del límite de un producto, que

a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$

b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^h} = 0$, $h \in \mathbb{N}^*$

24. Escribe dos sucesiones no convergentes cuyo producto sea una sucesión convergente.

Nota: El producto de dos sucesiones no convergentes puede ser convergente. Así, las sucesiones no convergentes

$$(-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots)$$

y

$$(1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots)$$

tienen por producto a la sucesión

$$(-1, -1, -1, -1, \ldots, -1, \ldots)$$

cuyo límite es -1.

5.2. El comportamiento del límite respecto del cociente de sucesiones viene dado por el siguiente teorema que no demostraremos:

Sea (a_n) una sucesión inversible con límite $a \neq 0$. Entonces la sucesión inversa $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ es convergente y tiene por lím $\frac{1}{a}$.

Esta propiedad se puede escribir simbólicamente así:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

Ejemplos:

- La sucesión $\left(\frac{n+1}{2n}\right)$ tiene por límite $\frac{1}{2}$ pues $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

- $\left(\frac{2n}{n+1}\right)$ tiene por límite 2, ya que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}} = 2.$$

Nota: Puede suceder que una sucesión (a_n) no tenga límite y, en cambio, su inversa sí lo tenga.

Ejemplo:

- La sucesión $(n) = (1, 2, 3, \ldots)$ no tiene límite. Su inversa $\left(\frac{1}{n}\right)$ sin embargo, es una sucesión cuyo límite es 0.

25. De las siguientes sucesiones di cuál es inversible y cuál no. Razona tu contestación.

a) $\left(\frac{n+1}{n}\right)$

b) $\left(\frac{n-1}{n}\right)$

c) $\left(\frac{n^2-3n+2}{n+1}\right)$

d) $\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)$

26. Halla el límite de la sucesión $\left(\frac{2+\frac{1}{n}}{\frac{n+1}{n}}\right)$

27. Halla la sucesión inversa de (n^2) y calcula su límite.

5.3. Sean (a_n) y (b_n) sucesiones convergentes, siendo además (b_n) inversible y con límite distinto de cero. Entonces la sucesión cociente es convergente y se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

La demostración es consecuencia de los dos teoremas anteriores. En efecto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \overset{①}{=} \lim_{n\to\infty} \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right) \overset{②}{=} \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} =$$

$$\overset{③}{=} \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \frac{1}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

donde se aplica:

en ① la definición de cociente de sucesiones;
en ② la propiedad **5.1.** del límite de un producto, y
en ③ la propiedad **5.2.** del límite de sucesión inversa.

Ejemplo:

- Las sucesiones (0,3, 0,33, 0,333, ...) y (0,6, 0,66, 0,666, ...) tienen por límite $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$, respectivamente. Su cociente

$$\left(\frac{0{,}3}{0{,}6}, \frac{0{,}33}{0{,}66}, \frac{0{,}333}{0{,}666}, \cdots\right) = (0{,}5, 0{,}5, 0{,}5, \ldots)$$

tiene por límite $\frac{1}{3} : \frac{2}{3} = 0{,}5$

Nota: Dos sucesiones pueden no ser convergentes y, no obstante, su cociente tener límite. Así las sucesiones

$$(n+1) = (2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots)$$
$$(n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots)$$

no tienen límite. Su cociente

$$\left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \cdots\right)$$

tiene por límite 1.

28. Si las sucesiones (a_n) y (b_n) tienen por límite 2 y $\frac{1}{2}$ respectivamente,

halla:

a) el límite de $(a_n) + (b_n)$,
b) el límite de $(a_n - b_n)$,
c) el límite de $(a_n b_n)$,
d) el límite de $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$

29. La sucesión $((-1)^{n+1})$ no tiene límite.

¿Tiene límite la sucesión $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$?

Razona la contestación.

30. Halla el límite de la sucesión

$$\left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2}\right)$$

¿Tienen límite las sucesiones dividendo y divisor?

¿Se puede aplicar para este cálculo el teorema del límite del cociente?

5.4. La sucesión constante $(1) = (1, 1, 1, \ldots)$ es evidente que tiene por límite 1.

Si consideramos en $\mathbf{S}_L = \{\text{Sucesiones convergentes}\}$ las dos operaciones $+$ y $\cdot$, resulta que la terna $(\mathbf{S}_L, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo y unitario.

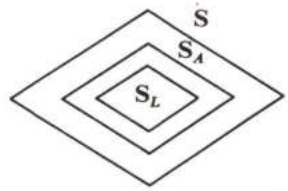
La sucesión $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ es una sucesión acotada y carece de límite, luego $\mathbf{S}_L \subset \mathbf{S}_A$ estrictamente.

Al margen se ha representado el diagrama de Venn de los siguientes conjuntos:

$\mathbf{S} = \{\text{Sucesiones}\}$

$\mathbf{S}_A = \{\text{Sucesiones acotadas}\}$

$\mathbf{S}_L = \{\text{Sucesiones convergentes}\}$



$\mathbf{S}_L \subset \mathbf{S}_A \subset \mathbf{S}$
(Fig. 15)

6 Multiplicación de una sucesión convergente por un número real. El espacio vectorial $(\mathbf{S}_L, +, \cdot\, \mathbb{R})$

6.1. Sea (a_n) una sucesión convergente y k un número real. Entonces (ka_n) es una sucesión convergente y se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} (ka_n) = k \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$

Si $k = 0$, la sucesión $(ka_n) = (0)$ y su límite es 0, y por tanto, igual a $k \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \cdot a = 0$.

Si $k \neq 0$ dado $\dfrac{\varepsilon}{|k|}$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|k|}, \quad \text{ya que} \quad a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

De la relación $|ka_n - ka| = |k(a_n - a)| = |k|\,|a_n - a|$ se sigue que: $|ka_n - ka| < |k|\,\dfrac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$

de donde $\lim_{n\to\infty} ka_n = ka = k \lim_{n\to\infty} a_n$.

Ejemplo:

- La sucesión $(0{,}3, 0{,}33, 0{,}333, \ldots)$ tiene por límite $\dfrac{1}{3}$.

  La sucesión $2 \cdot (0{,}3\ 0{,}33,\ 0{,}333,\ \ldots) = (0{,}6,\ 0{,}66,\ 0{,}666,\ \ldots)$

  tiene por límite $\dfrac{2}{3} = 2 \cdot \dfrac{1}{3}$.

31. Halla el límite de las sucesiones

$$(a_n) = \left(\frac{n+7}{n}\right) \quad \text{y} \quad 9(a_n)$$

32. Halla el límite de las sucesiones

$$(b_n) = \left(\frac{3n+3}{n}\right) \quad \text{y} \quad 5(b_n)$$

6.2. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, entonces la sucesión opuesta $(-a_n)$ tiene por límite $-a$, ya que $\lim_{n\to\infty}(-a_n) = \lim_{n\to\infty}(-1)a_n = (-1)\lim_{n\to\infty} a_n = -\lim_{n\to\infty} a_n = -a$, que es una demostración del teorema del apartado **4.2.**

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, entonces la sucesión $\left(\frac{k}{n}\right)$ con $k \in \mathbb{R}$ tiene por límite 0, puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(k \cdot \frac{1}{n}\right) = k \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = k \cdot 0 = 0$$

6.3. El conjunto de las sucesiones convergentes $\mathbf{S}_L$ con las operaciones suma y producto por un número real forman un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.

$(\mathbf{S}_L, +, \cdot\, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial.

33. Si el límite de la sucesión $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ es cero, demuestra que $\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n^2} = 0$

7 Sucesiones nulas

7.1. Dentro del conjunto $\mathbf{S}_L$ de sucesiones convergentes cabe destacar un subconjunto formado por las sucesiones que tienen límite cero.

Una sucesión (a_n) de números reales es nula si tiene por límite cero. También se dice que (a_n) es un infinitésimo o una sucesión infinitésima.

Son sucesiones nulas $\left(\frac{1}{n}\right)$ y $\left(\frac{k}{n^3}\right)$

El conjunto de las sucesiones nulas lo designaremos por $\mathbf{S}_0$.

$\mathbf{S}_0 \subset \mathbf{S}_L$ siendo el contenido estricto, ya que existen sucesiones convergentes no nulas, por ejemplo, la sucesión constante $(2) = (2, 2, 2, \ldots)$.

7.2. *La suma de dos sucesiones nulas y el producto de dos sucesiones nulas es una sucesión nula.* Esta es una consecuencia inmediata de los teoremas relativos al límite de una suma y de un producto de sucesiones.

El elemento neutro de la suma es $(0) = (0, 0, 0, \ldots) = 0$ y pertenece a $\mathbf{S}_0$.

La sucesión $(1) = (1, 1, 1, \ldots) \notin \mathbf{S}_0$, luego $\mathbf{S}_0$ es un anillo conmutativo no unitario. Por ser $\mathbf{S}_0 \subset \mathbf{S}_L$ se dice que $\mathbf{S}_0$ es un subanillo de $\mathbf{S}_L$.

7.3. *El producto de una sucesión nula por un número real es una sucesión nula.*

Esta propiedad es consecuencia de lo dicho en el apartado **7.2.** De lo anterior resulta que:

$(\mathbf{S}_0, +, \cdot\, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial.

7.4. El conjunto $\mathbf{S}_0$ de las sucesiones nulas tiene las siguientes propiedades:

a) $\mathbf{S}_0$ *tiene estructura de grupo aditivo.* Esto es consecuencia inmediata de lo dicho en **7.2.**

b) *El producto de una sucesiòn nula por una sucesión acotada es una sucesión nula.*

Sea $(a_n) \in \mathbf{S}_A$ una sucesión acotada y $(b_n) \in \mathbf{S}_0$ una sucesión nula.

Por ser $(a_n) \in \mathbf{S}_A \Longrightarrow \exists\, k > 0$ tal que $|a_n| \leqslant k,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Por ser $(b_n) \in \mathbf{S}_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \Longleftrightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$|b_n| < \frac{\varepsilon}{k},\quad \forall n > n_0$$

Entonces, $\forall\, n > n_0$ se verifica:

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| = k\,\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

En consecuencia $(a_n \cdot b_n)$ es una sucesión nula.

Ejemplo:

- El límite de $((-1)^{n+1}) \cdot \left(\frac{1}{n}\right)$ es cero, ya que $(-1)^{n+1}$ está acotada. $\left(\frac{1}{n}\right)$ es una sucesión nula.

7.5. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo e $I \subset A$. Se dice que I es un ideal de A si se verifica:

a) I es un grupo abeliano.

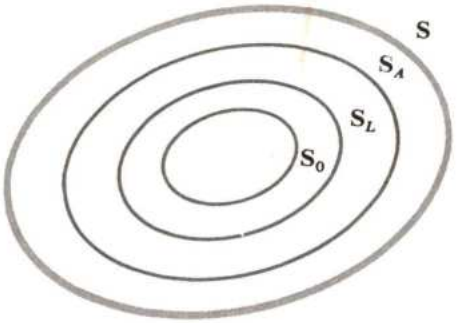
b) $\forall x \in I,\ \forall z \in A \Longrightarrow x \cdot z \in I$.

$\mathbf{S}_0$ es un subconjunto de $\mathbf{S}_A$, y por cumplir las condiciones a) y b) anteriores se dice que $\mathbf{S}_0$ es un ideal de $\mathbf{S}_A$.

34. Demuestra que la sucesión $\left(\frac{1}{n^4}\right)$ es una sucesión nula.

35. Las sucesiones $\left(\frac{1}{n}\right)$ y $\left(\frac{3}{n}\right)$ tienen por límite 0, es decir, son sucesiones nulas.
¿Cuál es el límite del cociente?

7.6. Los conjuntos de sucesiones $\mathbf{S}, \mathbf{S}_A, \mathbf{S}_L, \mathbf{S}_0$ estudiados hasta ahora están ordenados por la relación de inclusión «$\subset$» según se esquematiza en el diagrama del margen.



$\mathbf{S}_0 \subset \mathbf{S}_L \subset \mathbf{S}_A \subset \mathbf{S}$

7.7. La definición de límite de una sucesión se puede dar ahora en la forma siguiente:

Se dice que la sucesión (a_n) *tiene por límite* a *cuando la sucesión* $(a_n - a) = (\varepsilon_n)$ *es una sucesión nula.*

Se puede también escribir

$$(a_n) = (a) + (\varepsilon_n)$$

donde (ε_n) es una sucesión nula.

La sucesión $(0{,}9, 0{,}99, 0{,}999, 0{,}99\overset{n}{\ldots}9, \ldots)$ tiene por límite 1, ya que la sucesión diferencia es:

$$(1 - 0{,}9,\ 1 - 0{,}99,\ 1 - 0{,}999, \ldots, 1 - 0{,}99\overset{n}{\ldots}9, \ldots) =$$
$$= (0{,}1,\ 0{,}01,\ 0{,}001, \ldots, 0{,}000\overset{n-1}{\ldots}1, \ldots),$$

que es una sucesión nula.

8 Límite de sucesiones monótonas y acotadas

En este apartado se recoge un teorema que asegura la existencia de límite en un conjunto importante de sucesiones:

«Las sucesiones monótonas y acotadas.»

Toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente tiene límite.

En efecto, sea la sucesión (a_n) creciente y acotada superiormente.

El conjunto (a_n), por estar acotado superiormente, admite un *supremo* S', es decir, para todo $\varepsilon > 0$, $S' - \varepsilon$ no es cota de (a_n) y sí lo es S', luego existe un a_{n_0} tal que

$$S' - \varepsilon < a_{n_0} < S'$$

y por ser la sucesión creciente, para todo $n > n_0$ es

$$S' - \varepsilon < a_{n_0} \leqslant a_n < S'$$

Luego $S' = \lim_{n \to \infty} a_n$.

9 Sucesiones monótonas contiguas

9.1. El número real $\sqrt{2}$ viene determinado por la sucesión decimal de segmentos encajados:

$$S_0 = [1, 2]$$
$$S_1 = [1{,}4, 1{,}5]$$
$$S_2 = [1{,}41, 1{,}42]$$
$$S_3 = [1{,}414, 1{,}415]$$
$$S_4 = [1{,}4142, 1{,}4143]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

A partir de la sucesión $(S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots, S_n, \ldots)$ se obtienen las sucesiones siguientes:

$$(a_n) = (1, 1{,}4, 1{,}41, 1{,}414, 1{,}4142, \ldots)$$
$$(b_n) = (2, 1{,}5, 1{,}42, 1{,}415, 1{,}4143, \ldots)$$

Este par de sucesiones verifica las condiciones siguientes:

a) La sucesión (a_n) es una sucesión creciente y la sucesión (b_n) es una sucesión decreciente.

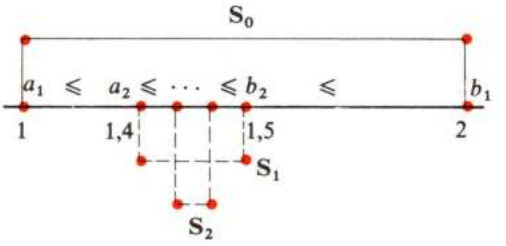
b) Todo término a_i de la primera es menor que su correspondiente de la segunda, es decir, $a_i < b_i$ para todo i.

c) La sucesión $(b_n - a_n)$ es una sucesión nula, ya que la diferencia $b_i - a_i$ es igual $\dfrac{1}{10^i}$, y por tanto es menor que cualquier número positivo ε, desde un valor i en adelante.

Dos sucesiones (a_n) y (b_n), como las anteriores, que verifican las tres condiciones anteriores reciben el nombre de sucesiones decimales monótonas convergentes o sucesiones decimales monótonas contiguas.

Dada, pues, una sucesión decimal de segmentos encajados, se obtiene un par de sucesiones monótonas convergentes, y recíprocamente.

La figura 16 muestra en la recta real la representación de la sucesión de segmentos encajados y las sucesiones monótonas convergentes.



(Fig. 16)

9.2. Vamos a generalizar esta idea de sucesiones decimales monótonas convergentes a sucesiones cualesquiera de números reales.

36. Escribe la sucesión de segmentos encajados de $\sqrt{5}$

¿Qué par de sucesiones monótonas convergentes determinan?

37. Escribe dos sucesiones monótonas convergentes que determinen $\dfrac{2}{3}$.

38. Se consideran las sucesiones monótonas convergentes que determinan $\dfrac{1}{3}$ y $\dfrac{2}{3}$.

Comprueba si sumándolas se obtiene el par de sucesiones monótonas convergentes que determinan $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}$.

Se llama sucesión de segmentos encajados toda sucesión de segmentos de la recta real

$$(S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots)$$

que verifican las dos condiciones siguientes:

1.ª) $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \cdots \supset S_n \supset S_{n+1} \supset \cdots$

2.ª) Para todo número real $\varepsilon > 0$ existe un segmento de longitud menor que ε.

Si la sucesión de segmentos encajados es

$$S_1 = [a_1, b_1]$$
$$S_2 = [a_2, b_2]$$
$$S_3 = [a_3, b_3]$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

se obtiene un par de sucesiones

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots)$$
$$(b_n) = (b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots, b_n, \ldots)$$

que cumplen las tres condiciones siguientes:

1.ª) La sucesión (a_n) es creciente y la sucesión (b_n) es decreciente.

2.ª) Todo término a_i de la primera es menor que su correspondiente b_i de la segunda.

3.ª) La sucesión $(b_n - a_n)$ es una sucesión nula.

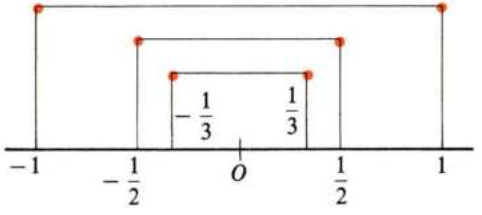
Un par de sucesiones que verifican las tres condiciones anteriores recibe el nombre de *sucesiones monótonas convergentes* o *sucesiones monótonas contiguas*. (Fig. 17.)

Ejemplos:

- Las sucesiones $\left(-\frac{1}{n}\right)$ y $\left(\frac{1}{n}\right)$ son dos sucesiones monótonas convergentes. La sucesión de los segmentos encajados correspondiente es:

$$S_1 = [-1, 1],\ S_2 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],\ S_3 = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right],\ \cdots$$

En la figura 17 se han representado los primeros términos de esta sucesión.



(Fig. 17)

39. Escribe una sucesión de segmentos encajados que contenga a 3.

40. Se consideran las sucesiones

$$k-1 \leqslant k-\frac{1}{2} \leqslant k-\frac{1}{3} \leqslant k-\frac{1}{4} \leqslant k-\frac{1}{4} \leqslant \cdots$$
$$k \geqslant k \geqslant k \geqslant k \geqslant k \geqslant \ldots$$

¿Forman un par de sucesiones monótonas convergentes? En caso afirmativo, ¿cuál es la sucesión de intervalos encajados que determinan?

- La sucesión de segmentos encajados que determinan $\frac{1}{3}$ es:

$$([0,1],\ [0,3, 0,4],\ [0,33, 0,34],\ [0,333, 0,334],\ \ldots)$$

y las sucesiones monótonas convergentes correspondientes:

$$0 \leqslant 0,3 \leqslant 0,33 \leqslant 0,333 \leqslant 0,3333 \leqslant, \ldots$$

$$1 \geqslant 0,4 \geqslant 0,34 \geqslant 0,334 \geqslant 0,3334 \geqslant, \ldots$$

- Las sucesiones

$$k \leqslant k \leqslant k \leqslant k \leqslant \ldots$$

$$k+1 \geqslant k+\frac{1}{2} \geqslant k+\frac{1}{3} \geqslant k+\frac{1}{4} \geqslant \cdots$$

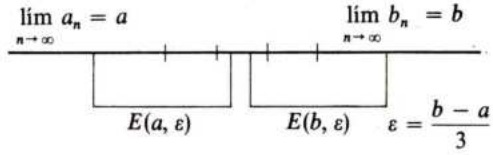
son sucesiones monótonas convergentes.

9.3. *Dos sucesiones monótonas contiguas* (a_n) *y* (b_n) *tienen el mismo límite.*

Vamos a considerar en la demostración de este teorema dos puntos:

1.º) Las sucesiones monótonas contiguas tienen límite. La sucesión (a_n) tiene límite, puesto que es una sucesión creciente y está acotada superiormente por cualquiera de los términos de la sucesión (b_n).

Análogamente, la sucesión (b_n) tiene límite, puesto que es decreciente y está acotada inferiormente por cualquiera de los términos de la sucesión (a_n). (Fig. 18.)



(Fig. 18)

2.º) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, entonces $a = b$.

Por ser $a_n < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ se obtiene que $a \leqslant b$. (Propiedad **3.5.**)

Supongamos que $a \neq b$, ya que en caso contrario está demostrado el teorema. Tomando $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$, los términos de la sucesión (a_n) estarán en el entorno $E(a, \varepsilon)$ para todo $n > n_0$, y por la misma razón los términos de la sucesión (b_n) estarán en el entorno $E(b, \varepsilon)$ para todo $n > n_1$.

Así se tendría que $b_n - a_n > \frac{b-a}{3} = \varepsilon$ (Fig. 18)

para todo $n >$ máx $\{n_0, n_1\}$, en contradicción con la condición 3.ª de la definición de sucesiones monótonas contiguas de que la sucesión $(b_n - a_n)$ es una sucesión nula, luego:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

41. ¿Forman un par de sucesiones monótonas convergentes las sucesiones $\left(-\frac{1}{n^2}\right)$ y $\left(\frac{1}{n^2}\right)$?

42. ¿Forman un par de sucesiones monótonas convergentes las sucesiones

$$\left(k-\frac{1}{n}\right) \quad \text{y} \quad \left(k+\frac{1}{n}\right)?$$

Ejercicios y cuestiones

43. Las sucesiones $(a_n) = (2, 3, 4, 5, 6, \ldots, n + 1, \ldots)$ y $(b_n) = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots)$ no tienen límite en $\mathbb{R}$.

¿Existe límite de $(a_n - b_n)$? Si existe, ¿cuánto vale?

Razona si son o no verdaderos los siguientes enunciados:

a) Toda sucesión convergente tiene por inversa una sucesión convergente.

b) Toda sucesión no convergente tiene por inversa una sucesión convergente.

c) Toda sucesión no convergente tiene por inversa una sucesión no convergente.

44. a) Pon tres ejemplos de sucesiones crecientes y no convergentes.

b) Pon tres ejemplos de sucesiones crecientes y convergentes.

c) Pon tres ejemplos de sucesiones acotadas y convergentes.

d) Pon tres ejemplos de sucesiones acotadas y no convergentes.

45. Un alumno da la siguiente definición de límite:

«Se dice que una sucesión (a_n) tiene por límite a cuando todo entorno de a tiene infinitos términos de la sucesión a partir de uno en adelante».

¿Es esta definición equivalente a las dadas en el texto?

En caso negativo, pon un ejemplo.

46. Demuestra que las sucesiones $\left(\frac{1}{2^n}\right)$, $\left(\frac{1}{3^n}\right)$, $\left(\frac{1}{4^n}\right)$ son sucesiones nulas.

a) Pon un ejemplo de sucesiones no convergentes y cuya suma sí lo sea.

b) Pon un ejemplo de sucesiones no convergentes y cuyo producto sí lo sea.

47. Demuestra que la sucesión (a_n) definida por $a_{2n+1} = 1 - \frac{1}{n}$, $\quad a_{2n} = \frac{1}{n}$ no tiene límite.

48. Se considera el número real 5. Escribe las sucesiones monótonas convergentes cuya diferencia sea la sucesión decimal $\left(\frac{1}{10^n}\right)$.

49. La sucesión decimal de intervalos encajados que determina $\sqrt{3}$ es

$$[1, 2],\ [1{,}7\ 1{,}8],\ [1{,}73, 1{,}74],\ [1{,}732, 1{,}733], \ldots$$

Escribe, a partir de ésta, las sucesiones monótonas convergentes que determinan también $\sqrt{3}$.

50. Te dan la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$.

a) ¿Cuál es su límite?

b) ¿Es una sucesión creciente o decreciente?

c) Di cinco cotas inferiores de esta sucesión.

d) ¿Cuál es el extremo inferior? ¿Pertenece a la sucesión?

Tema 10 CALCULO DE LIMITES. EL NUMERO e

En los dos temas anteriores se han dado los conceptos previos necesarios para el cálculo efectivo del límite de una sucesión.

En este tema se calculan directamente los límites de las sucesiones:

$$\left(\frac{1}{n}\right),\ (k),\ \left(\frac{k}{n^\alpha}\right),\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Los límites de muchas de las sucesiones que aparecen en este tema se obtienen a partir de aquellos y de la aplicación de los teoremas relativos a los límites.

En la segunda parte se estudian las sucesiones en la recta real completa.

1 Límite de las sucesiones $\left(\frac{1}{n}\right), \left(\frac{k}{n}\right), \cdots, \left(\frac{k}{n^\alpha}\right)$; $\alpha \in \mathbb{N}^*$

1.1. El límite de la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ es cero, es decir, la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ es nula.

La definición exige probar que para cada número real positivo ε existe un número natural positivo n_0 tal que, siempre que $n > n_0$ se verifique $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$.

En el ejemplo del apartado **2** del tema 9 se vio que efectivamente esta desigualdad se cumple para $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, luego $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

1.2. La sucesión $\left(\frac{k}{n}\right)$ es una sucesión nula.

En efecto: $\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(k \cdot \frac{1}{n}\right) = k \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = k \cdot 0 = 0.$

Ejemplos:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 2 \cdot 0 = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{n} = \sqrt{\pi} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \sqrt{\pi} \cdot 0 = 0$

Ejercicios:

1. En la sucesión $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ halla el número natural n_0 tal que se verifique
$$a_n \in]0 - 10^{-8},\ 0 + 10^{-8}[$$
para todo $n < n_0$.

2. Halla $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

3. Razona los pasos dados en la demostración de la propiedad **1.2.**.

4. Halla el límite de la sucesión $\frac{n^2+n}{2n^2}$ descomponiendo la sucesión dada en la suma de dos sucesiones.

1.3. Las sucesiones $\left(\frac{k}{n^2}\right), \left(\frac{k}{n^3}\right), \cdots \left(\frac{k}{n}\right)$ son sucesiones nulas.

Indíquese las propiedades que se aplican en cada una de las igualdades siguientes:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n^2} = k \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = k \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right) = k \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} =$
$= k \cdot 0 \cdot 0 = 0$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n^3} = k \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = k \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n}\right) = k \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} =$
$= k \cdot 0 \cdot 0 = 0$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n^\alpha} = k \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdots\frac{1}{n}\right) = k \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdots \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} =$
$= k \cdot 0 \cdot 0 \ldots 0 = 0$

1.4. La sucesión constante $(k) = (k, k, k, \ldots)$ tiene por límite k, es decir, $\lim_{n\to\infty} (k) = k$

Esto es evidente ya que la diferencia $k - k = 0$ es menor que cualquier número real positivo para todo $n \geqslant 1$.

Ejemplos:

- La sucesión constante $(3, 3, 3, \ldots)$ tiene por límite 3.

- La sucesión constante $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots\right)$ tiene por límite $\frac{1}{2}$.

- La sucesión $\left(\frac{n^2 + n + 1}{2n^2}\right)$ tiene por límite $\frac{1}{2}$.

  En efecto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 3n + 5}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{2n^2} + \frac{3n}{2n^2} + \frac{5}{2n^2}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right) + \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2n} + \lim_{n\to\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{1}{2} + 0 + 0 = \frac{1}{2}$$

- El límite de la sucesión $\frac{n-1}{n^2-1}$ es cero, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{(n+1)(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

5. Calcula: a) $\lim_{n\to\infty} \frac{7}{n}$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{28}{n^2}$

6. Dada la sucesión $\left(\frac{1}{n^3}\right)$ y el entorno $E(0, 10^{-6})$ halla el término a partir del cual todos están incluidos en dicho entorno.

7. Escribe una sucesión que tenga por límite 2.

8. Halla el límite de la sucesión constante $(7, 7, 7, \ldots)$.

¿Tiene el mismo límite la sucesión $\left(7 + \frac{1}{n}\right)$? Razona tu contestación.

9. Demuestra que las sucesiones

$(8) = (8, 8, 8, \ldots)$ y

$(a_n) = \left(8 - \frac{1}{n}\right)$ tienen el mismo límite.

Nótese que la sucesión $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ es la misma que la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$, excepto el primer término, y por tanto tienen el mismo límite.

2 Límite del cociente de polinomios en n

2.1. Con frecuencia, la aplicación de los teoremas sobre límites no es posible si antes no se han realizado algunas transformaciones en la expresión que define la sucesión.

Por ejemplo, dada la sucesión $(a_n) = \left(\frac{3n+1}{5n-2}\right)$, si aplicamos el teorema del cociente de límites, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{5n-2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} (3n+1)}{\lim\limits_{n\to\infty} (5n-2)}.$$

Como tanto el numerador como el denominador carecen de límites, el teorema del límite de un cociente no se puede aplicar.

Podemos, sin embargo, dividir el numerador y el denominador por n, de manera que la sucesión (a_n) se escriba así:

$$a_n = \left(\frac{3n+1}{5n-2}\right) = \left(\frac{3+\frac{1}{n}}{5-\frac{2}{n}}\right)$$

Ahora ya es aplicable el teorema, puesto que el denominador tiene límite distinto de cero y el numerador tiene límite. Resulta por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{5n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{5-\frac{2}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{2}{n}\right)} = \frac{3}{5}$$

10. Halla el límite de la sucesión

$$(a_n) = \left(\frac{n^2+5n-2}{2n^2+1}\right)$$

11. Halla el límite de la sucesión

$$(b_n) = \left(\frac{n^2+a^2}{n^2-a}\right)$$

siendo a una constante.

12. Halla el límite de la sucesión

$$(c_n) = \left(\frac{an+b}{cn+a}\right)$$

2.2. En la evaluación de las expresiones racionales podemos considerar tres casos:

a) Los polinomios en n del numerador y del denominador son del mismo grado.

En este caso se divide el numerador y denominador por la potencia máxima de n, y el límite es el cociente de los coeficientes términos de mayor grado.

Así en la sucesión $\left(\frac{2n+3}{3n+1}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n+5}{7n^2-5n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}{7-\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(7-\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3}{7}$$

b) El grado del numerador es mayor que el grado del denominador.

Dada la sucesión $\left(\frac{3n^3-2n+1}{5n^2-1}\right)$, es evidente que tanto el numerador como el denominador carecen de límite.

Si dividimos por n^2, resulta:

$$\left(\frac{3n-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{5-\frac{1}{n^2}}\right)$$

expresión a la que tampoco se puede aplicar el teorema del cociente por carecer de límite el numerador.

Lo mismo sucede si se divide numerador y denominador por n^3, puesto que resulta:

$$\left(\frac{3-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\frac{5}{n}-\frac{1}{n^3}}\right)$$

y siendo el $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}\right) = 0$ no se puede aplicar el teorema del cociente.

En general puede demostrarse que no existe límite de las expresiones racionales cuando el numerador tiene mayor grado que el denominador.

13. Halla el límite de la sucesión

$$\left(\frac{n^2(3n-2)}{(n-1)^2(4-n)}\right)$$

14. Halla el límite de la sucesión

$$\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2+1}\right)$$

15. Se considera el término general dado por

$$a_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{2n^2+1}$$

Halla $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(Indicación: En el numerador figura la suma de los términos de una progresión aritmética.)

c) El grado del numerador es menor que el grado del denominador.

Sea la sucesión $\left(\frac{2n^2 - 3n + 1}{n^3 + 5n}\right)$. Si dividimos numerador y denominador por n^3, queda:

$$\left(\frac{\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{5}{n^2}}\right)$$

esta sucesión es igual que la dada, y en ella se puede aplicar el teorema del cociente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{n^3 + 5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{5}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{5}{n^2}\right)} = \frac{0}{1} = 0$$

Si en una sucesión racional el grado del numerador es menor que el grado del denominador, el límite de la sucesión es cero.

Ejemplos:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{2n + 1}{n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + 1}{n^6 + n^5} = 0$
- El límite de la sucesión $\left(\frac{n^m}{(n + b)^{m+1}}\right)$ es cero,

  ya que el grado del numerador es m y el del denominador es $m + 1$.

16. Halla el límite de la sucesión

$$\left(\frac{a + 2a + 3a + \cdots + na}{an^2 + b}\right)$$

17. Sabiendo que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

halla el límite de la sucesión

$$\left(\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{5n^3 - n^2}\right)$$

3 Límites de sucesiones con expresiones radicales

3.1. El límite de la sucesión $\frac{1}{\sqrt{n}}$ es cero.

Vamos a determinar un número natural $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que siempre que $n > n_0$ se verifique $\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| < \varepsilon$; esto equivale a decir que $-\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$.

Como $\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$, basta tomar la desigualdad $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$.

Se tiene $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Longrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon^2 \Longrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2}$

Si se elige n_0 como el primer número natural mayor que $\frac{1}{\varepsilon^2}$

entonces $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ para todo $n > n_0$.

Y por la definición de límite se sigue que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

3.2. El límite de la sucesión $\frac{1}{\sqrt{n+a}}$ es cero.

Los términos de esta sucesión verifican la desigualdad

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n+a}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

y aplicando la propiedad **3.5.** del tema 9 se tiene:

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+a}} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+a}} = 0$$

3.3. El límite de la sucesión $\left(\frac{1}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}}\right)$ es cero.

Los términos de esta sucesión verifican la desigualdad

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

y por la propiedad **3.5.** del tema 9 resulta:

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}} = 0$$

18. Halla n_0 en la sucesión

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{si} \quad \varepsilon = 10^{-4}$$

19. Halla el término a_{n_0} de la sucesión $\frac{1}{\sqrt{n}}$ a partir del cual todos los siguientes están en el entorno $]-10^{-6}, 10^{-6}[$ del punto 0.

20. Calcula el límite de $\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$ teniendo presente que $\frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$

21. Halla el término a_{10} y a_{100} de la sucesión $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ y comprueba que $a_{10} > a_{100}$.

3.4. Se trata de hallar el límite de la sucesión $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$. No se puede aplicar el teorema del límite de una diferencia, puesto que $(\sqrt{n+1})$ y $(\sqrt{n})$ carecen de límite en $\mathbb{R}$.

Si multiplicamos y dividimos por $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, resulta:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Si tomamos límites, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

Muchos de los límites de sucesiones en cuyas expresiones entran radicales cuadráticos en forma de sumas se determinan multiplicando y dividiendo por la expresión radical conjugada.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n(n+2)} - n = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n(n+2)} - n)(\sqrt{n(n+2)} + n)}{\sqrt{n(n+2)} + n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n - n^2}{\sqrt{n(n+2)} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n},$$

y dividiendo por n resulta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} = 1$$

22. Halla el límite de la sucesión

$$\sqrt{(n+1)(n+2)} - \sqrt{n^2 + 1}$$

23. Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + 4n + 1} - \sqrt{n^2 + 8n + 1})$$

24. Halla:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{2n^2 + 3n - 2} - \sqrt{2n^2 + 2})$$

4 El número e. Existencia

4.1. En este párrafo se estudia detenidamente el límite de la sucesión definida por $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Este número se designa con la letra e en honor a Euler.

El *número e* viene definido por:

$$\mathbf{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

En dos cuestiones se centra el estudio:

a) Existencia de número e, es decir, del límite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

b) Valor aproximado del número e.

4.2. La sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es creciente.

El término n-ésimo de la sucesión se desarrolla aplicando el binomio de Newton de la siguiente forma:

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\binom{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots+\binom{n}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^n=$$

$$=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}=$$

$$=2+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n\cdot n\cdot n}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{n\cdot n\cdot n\overset{n}{\ldots}\cdot n}=$$

$$=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Esta expresión de a_n consta de n sumandos.

Análogamente tendríamos

$$a_{n+1}=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

Esta expresión de a_{n+1} consta de $n+1$ sumandos.

Si comparamos los términos a_n y a_{n+1} se comprueba que los sumandos de a_{n+1} son mayores que los correspondientes de a_n (salvo el primero, que es igual); por tanto, $a_n < a_{n+1}$.

25. Calcula directamente los primeros elementos de la sucesión $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, es decir $\left(1+\frac{1}{1}\right)$, $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(1+\frac{1}{3}\right)^3$, $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4$,...

Se tiene pues, que $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 \leqslant \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \leqslant \cdots$,

luego la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es una sucesión creciente.

4.3. La sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ está acotada.

Si comparamos término a término la suma que da a_n en **4.2.** con la siguiente,

$$b_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

resulta que

$$a_n < b_n$$

pues los sumandos de a_n son menores que los de b_n.

Por otra parte, si se compara la sucesión b_n con

$$c_n = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

se observa que $b_n < c_n$

y como $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2^{n-1}}$ son los términos de una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$, su suma es:

$$S = \frac{\frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

entonces $c_n = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$

Así pues, se tienen las desigualdades $2 < a_n < b_n < c_n < 3$.

Esta desigualdad demuestra que para todo n el valor del término a_n está comprendido entre 2 y 3.

Luego la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es una sucesión acotada, y un intervalo de acotación es $[2, 3]$.

26. Comprueba que se verifican las desigualdades siguientes:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 < \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 < \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 < \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 \cdots$$

27. Demuestra que $\left(1-\frac{1}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

28. Comprueba que

a) $\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2!}$

b) $\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) < \frac{1}{3!}$

29. Comprueba que

a) $\frac{1}{3!} = \frac{1}{2\cdot 3} < \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{2^2}$

b) $\frac{1}{4!} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} < \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{1}{2^3}$

c) $\frac{1}{n!} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4 \ldots n} < \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2 \ldots 2} = \frac{1}{2^{n-1}}$

30. Demuestra que $\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 3$

4.4. La sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es una sucesión creciente y acotada, y en consecuencia tiene límite. El límite de esta sucesión es por definición el número e.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

5 Cálculo aproximado del número e

Como la sucesión que define el número e es una sucesión creciente y acotada por 3, cada término de la sucesión es una aproximación de e por defecto

– mejor que el término anterior,

– peor que el término siguiente.

El primer término de la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$,

luego se tiene la acotación $2 < e < 3$

El término n-ésimo

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots$$

para n grande se aproxima al número e.

El cálculo efectivo del número e se puede hacer *directamente calculando los sucesivos términos de la sucesión*, tal como se hace al margen.

Cuanto mayor es n, mayor es la aproximación que se obtiene.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2,000000
2	2,250000
3	2,370370
4	2,441406
⋮	⋮
1.000	2,716924
10.000	2,718146
100.000	2,718255
1.000.000	2,718282
⋮	⋮

6 Límite de la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

6.1. Se puede probar que la sucesión $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ es decreciente.

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) =$

$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e$

y $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ es una sucesión decreciente que tiene por límite e, se tiene que $e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ para todo $n\in\mathbb{N}^*$.

También se vio que la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ es una sucesión creciente que tiene por límite e, luego $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e$ para todo $n\in\mathbb{N}^*$; en consecuencia, para todo $n\in\mathbb{N}^*$ se verifica:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

6.2. También se puede probar que la sucesión $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$ es acotada y creciente; por tanto tiene límite.

Como $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$

se tiene:

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\downarrow\ e} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}}_{\downarrow\ L} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}_{\downarrow\ 1}$$

luego $L = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = e$

31. Comprueba que

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^{3} > \left(1+\frac{1}{3}\right)^{4}$$

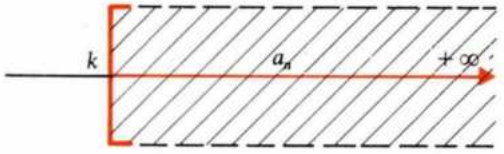
7 Límites infinitos

El concepto de límite definido en $\mathbb{R}$ se extiende ahora a $\overline{\mathbb{R}}$.

Se dice que una sucesión (a_n) tiene por límite $+\infty$, y se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, cuando para todo $k\in\mathbb{R}$ existe un $n_0\in\mathbb{N}^*$ tal que para todo $n > n_0$ se tiene $a_n \geqslant k$.

Ejemplos:

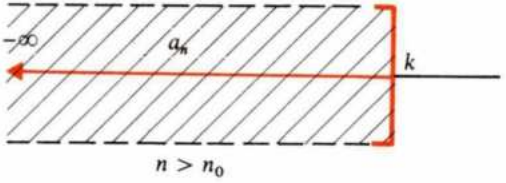
- La sucesión $(1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$ tiene por límite $+\infty$, ya que dado cualquier número k existe un número natural n_0 a partir del cual $n > k$.
- La sucesión de los números pares tiene por límite $+\infty$.
- La sucesión formada por las potencias de 2 de exponente positivo, es decir, la sucesión $(2^{n-1}) = (1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots)$ tiene por límite $+\infty$.



(Fig. 1)

De otro modo: una sucesión (a_n) tiene por límite $+\infty$ cuando para todo entorno de $+\infty$, $[k, +\infty]$, existe un término de la sucesión a_{n_0} tal que a partir de él todos los términos siguientes se encuentran en dicho entorno. (Fig. 1.)

Se dice que la sucesión (a_n) tiene por límite $-\infty$, y se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, *cuando para todo $k \in \mathbb{R}$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que para todo $n > n_0$, $a_n \leqslant k$.*



(Fig. 2)

De otro modo: una sucesión (a_n) tiene por límite $-\infty$ cuando para todo entorno de $-\infty$, $[-\infty, k]$, existe un término de la sucesión a_{n_0} tal que a partir de él todos los términos siguientes se encuentran en dicho entorno. (Fig. 2.)

Ejemplos:

- La sucesión $(-1, -2, -3, -4, \ldots, -n, \ldots)$ tiene por límite $-\infty$.
- La sucesión de los números impares negativos tiene por límite $-\infty$.
- La sucesión $(1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots)$ no tiene límite en $\overline{\mathbb{R}}$, ya que no tiene límite en $\mathbb{R}$ ni tampoco tiene por límite $+\infty$ o $-\infty$.

El conjunto de sucesiones de $\overline{\mathbb{R}}$ que tienen límite se llaman *sucesiones convergentes*. Este conjunto se designará por $\overline{\mathbb{S}}_L$.

32. Escribe tres sucesiones cuyo límite sea $+\infty$.

33. La sucesión (n) tiene por límite $+\infty$, ¿qué límite tiene la sucesión inversa?

8 Cálculo con límites infinitos

8.1. El siguiente cuadro muestra el valor del límite de la suma de sucesiones en función de los límites de los sumandos.

+		LIMITES		
	(a_n) / (b_n)	a	$+\infty$	$-\infty$
LIMITES	b	$a+b$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
	$-\infty$	$-\infty$		$-\infty$

Demostremos uno de los casos.

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$.

Hemos de probar que, dado un número k cualquiera, $b_n + a_n \geqslant k$ a partir de un cierto valor de n.

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow (a_n)$ es una sucesión acotada, luego existe $h \in \mathbb{R}^*_+$ tal que

$$-h \leqslant a_n \leqslant h \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Si $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \Longrightarrow$ dado $k + h$, existe un $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tal que $b_n \geqslant k + h$ para todo $n > n_1$.

Entonces se tiene $\begin{cases} b_n \geqslant k + h \\ a_n \geqslant -h \end{cases}$ y sumando estas desigualdades resulta $b_n + a_n \geqslant k$, luego $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$.

Ejemplos:

- Las sucesiones $(a_n) = (2n + 1)$ y $(b_n) = \left(\frac{3n - 3}{n}\right)$ tienen por límite $+\infty$ y 3 respectivamente. Su suma

$$(a_n + b_n) = \left(2n + 1 + \frac{3n - 3}{n}\right) = \left(\frac{2n^2 + 4n - 3}{n}\right)$$

tiene por límite $+\infty$.

34. Escribe dos sucesiones cuyo límite sea $+\infty$ y cuya diferencia tenga por límite 2.

35. Demuestra que si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty = \lim_{n\to\infty} b_n$, entonces se verifica que $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$.

36. Escribe dos sucesiones cuyo límite sea $+\infty$ y cuya diferencia tenga por límite 5.

- Las sucesiones $(a_n) = (n^2 + 1)$ y $(b_n) = (n + 5)$ tienen por límite $+\infty$. Su suma es la sucesión

  $(a_n + b_n) = (n^2 + n + 6)$, que tiene por límite $+\infty$

- El $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ no se puede calcular aplicando el teorema del límite de la diferencia, ya que se tendría

  $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1} - \lim_{n\to\infty}\sqrt{n} = (+\infty) - (+\infty)$

  y esto carece de sentido en $\overline{\mathbb{R}}$. El cálculo efectivo de este límite se ha hecho en el apartado **3.4.**, y es 0.

- La sucesión $(2, 3, 4, 5, \ldots, n + 1, \ldots)$ tiene por límite $+\infty$, lo mismo sucede con la sucesión $(1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots)$. La sucesión diferencia es $(1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ cuyo límite es 1.

Los dos últimos ejemplos muestran que cuando aparecen $+\infty$ y $-\infty$ como límites de los sumandos, no se puede obtener el límite de la suma a partir de éstos. Hay que calcularlo directamente; se dice que es un caso de indeterminación. En el cuadro los casos de indeterminación corresponden a los dos rectángulos rayados.

8.2. El valor del límite del producto en función de los valores de los límites de los factores viene dado en el siguiente cuadro:

		LIMITES			
	(a_n) / (b_n)	$a \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
LIMITES	$b \neq 0$	$a \cdot b$	0	$+\infty$ si $b > 0$ $-\infty$ si $b < 0$	$-\infty$ si $b > 0$ $+\infty$ si $b < 0$
	0	0	0		
	$+\infty$	$+\infty$ si $a > 0$ $-\infty$ si $a < 0$		$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$-\infty$ si $a > 0$ $+\infty$ si $a < 0$		$-\infty$	$+\infty$

Los rectángulos rayados indican que no se puede obtener el límite del producto a partir de los límites de los factores. Son casos indeterminados $0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0$; $0 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 0$

37. Demuestra que si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$$

entonces $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = +\infty$.

Al igual que en la suma vamos a demostrar uno de los casos.

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty = \lim_{n\to\infty} b_n$ entonces $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = +\infty$.

En efecto: $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff$ para todo k existe un $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que si $n > n_0$ resulta que $a_n > k$

$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \iff$ para todo k' existe un $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tal que si $n > n_1$ resulta que $a_n > k'$

luego si $n > \text{máx}\{n_0, n_1\}$ se tiene entonces que

$$a_n \cdot b_n > k + k'$$

De este resultado se deduce inmediatamente que

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = +\infty$$

Ejemplos:

- $\lim_{n\to\infty} (5n^2 - 2n) = \lim_{n\to\infty} n^2 \left(5 - \frac{2}{n}\right) =$

  $= \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(5 - \frac{2}{n}\right) = (+\infty)\cdot 5 = +\infty$

- $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} (2n + 1) = +\infty$, por tanto el

  $\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot (2n+1) = \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \lim_{n\to\infty} (2n+1) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty.$

- Las sucesiones $(a_n) = \left(\frac{2}{n+1}\right)$ y $(b_n) = (2n + 1)$

  tienen por límite respectivamente 0 y $+\infty$.

  Para calcular el límite del producto no podemos aplicar la regla del límite de un producto, puesto que $0 \cdot (+\infty)$ carece de significado. Efectuando el producto, resulta:

  $$\left(\frac{2}{n+1}\right)(2n+1) = \left(\frac{2(2n+1)}{n+1}\right) = \left(\frac{4n+2}{n+1}\right)$$

  El límite de esta expresión es 4. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = 4$.

- En cada una de las siguientes sucesiones el primer factor tiene por límite 0, y el segundo, $+\infty$:

  $$\left(\frac{a}{n}\cdot n\right); \quad \left(\frac{1}{n^2}\cdot n\right); \quad \left(\frac{1}{n}\cdot n^3\right); \quad \left(\frac{(-1)^n}{n}\cdot n\right)$$

  Las tres primeras sucesiones tienen por límite a, 0 y $+\infty$ respectivamente, como se puede comprobar fácilmente. La cuarta sucesión es $(-1, 1, -1, 1, \ldots)$ y carece de límite.

38. Escribe dos sucesiones que tengan respectivamente por límite 0 y $+\infty$ y cuyo producto tenga por límite 1.

39. Halla el límite de la sucesión

$$(a_n) = \left(\sqrt{n+7} - \sqrt{n}\right)$$

40. Calcula el límite de $\left(\frac{1}{n}\right)(2n^2 + 1)$.

¿Se puede aplicar directamente el teorema del límite del producto?

Razona la contestación.

8.3. El siguiente cuadro muestra el valor del límite del cociente en función de los límites del divididendo y del divisor:

		LIMITES			
	(b_n) \ (a_n)	$a \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
LIMITES	$b \neq 0$	$\frac{a}{b}$	0	$+\infty$ si $b > 0$ $-\infty$ si $b < 0$	$-\infty$ si $b > 0$ $+\infty$ si $b < 0$
	0				
	$+\infty$	0	0		
	$-\infty$	0	0		

Los rectángulos rayados indican que no se puede obtener el límite del cociente, si existe, a partir de los límites del dividendo y del divisor. Son casos indeterminados y su cálculo efectivo ha de hacerse directamente.

Vamos a demostrar uno de los casos.

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b > 0$, entonces $\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = +\infty$

$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff \forall k > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si

$$n > n_0 \quad \text{resulta que} \quad a_n > k \cdot h$$

$\lim_{n\to\infty} b_n = b > 0 \Longrightarrow$ existe un número $h \in \mathbb{R}_+^*$ tal que verifica la relación siguiente:

$0 < b_n < h$ desde un cierto término en adelante. De las relaciones

$$\left.\begin{matrix} a_n > k \cdot h \\ b_n < h \end{matrix}\right\} \text{ se sigue que } \quad \frac{a_n}{b_n} > \frac{k \cdot h}{h} = k$$

Luego $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b^n} = +\infty$

Ejemplos:

- Sean las sucesiones $(a_n) = 2n^2 + 1$ y $(b_n) = \left(2 + \frac{1}{n}\right)$.

  Su cociente es,

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{2n^2 + 1}{2 + \frac{1}{n}}$$

41. Halla el límite de la sucesión

42. Halla el límite de la sucesión $\left(\frac{1}{n^2} : \frac{1}{n^3}\right)$

43. Escribe dos sucesiones (a_n) y (b_n) tales que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

y comprueba que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

Hallando límites, resulta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2n^2 + 1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{+\infty}{2} = +\infty$$

- Se consideran las sucesiones $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$, $(b_n) = \left(\frac{1}{n^2}\right)$ que tienen por límite 0. Por tanto no se puede aplicar la regla del cociente para hallar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$

  Si hacemos la división de las dos sucesiones, se obtiene:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n} : \frac{1}{n^2} = \frac{n^2}{n} = n$$

  La sucesión cociente es (n) y su límite $+\infty$.

- Si consideramos el límite siguiente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n + 1}{n^2 + n + 1}$$

  y aplicamos el teorema del cociente, se tendrá:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n + 1}{n^2 + n + 1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} (2n + 1)}{\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 + n + 1)} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

  resultado que carece también de significado.

  El cálculo efectivo del límite se puede hacer así:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n + 1}{n^2 + n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{n + 1 + \frac{1}{n}} = \frac{2}{+\infty} = 0.$$

- En cada una de las sucesiones siguientes el dividendo y el divisor tienen por límite $+\infty$ ó 0 según la forma en que se escriban:

$$\left(\frac{an}{bn}\right) = \left(\frac{\frac{a}{n}}{\frac{b}{n}}\right); \quad \left(\frac{n}{n^2}\right) = \left(\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}\right); \quad \left(\frac{n^2}{n}\right) = \left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\right)$$

  Escrita en la primera forma, el límite del cociente es $\frac{+\infty}{+\infty}$; escrita en la segunda forma es $\frac{0}{0}$.

  Por tanto no se puede aplicar el teorema del límite de un cociente. El cálculo efectivo de estos límites da, como puede comprobarse fácilmente, $\frac{a}{b}$ en la primera sucesión, 0 en la segunda y $+\infty$ en la tercera.

44. Halla el límite de la sucesión $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + 1}\right)$

45. Halla el límite de la sucesión $\left(\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2 + 1}\right)$

46. Calcula el límite de la sucesión $\frac{n^2 + 1}{2n^2 + 1}$

Ejercicios y cuestiones

47. Halla el límite de la sucesión $(\sqrt{n+a} - \sqrt{n})$

48. Representa los primeros términos de la sucesión $(a_n) = (2n - 5)$

a) ¿Está acotada la sucesión? b) ¿Tiene límite finito esta sucesión?

49. Siendo $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$, calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

50. Calcula el valor del siguiente límite: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a + 2a + 3a + \cdots + na}{(n+a)^2}$

51. Calcula el límite siguiente: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n+1)^3 - (3n-1)^3}{3n^2 + 1}$

52. Si a los dos términos de una fracción se le suma $n \in \mathbb{N}^*$, ¿sabes cuál es el límite de esa fracción cuando n tiende a infinito? ¿Por qué? Pon ejemplos.

53. Siendo $a_n = \dfrac{n^2 - 2n}{n^3 + n}$, $\quad b_n = \dfrac{n^3 - 5n}{n^2 - 3n}$, se pide:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n)$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n)$

¿En los apartados c), d) y e) se verifican los teoremas del producto, cociente y diferencia respectivamente, relativos a límites?

54. Calcula el límite $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2n^2 + 3n - 2} - \sqrt{2n^2 + 2})$

55. Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^2+2)(n^2-2)}{(n+2)^2(2n-1)^2}$

56. Halla el límite de la sucesión cuyos términos son:

$$a_1 = \frac{1}{1^2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$$

$$a_3 = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^2}$$

$$a_4 = \frac{1}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^2}$$

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$$

$$\vdots$$

57. Halla el límite de la sucesión cuyo término general es $a_n = 1 - \dfrac{(-1)^n}{n}$

DIAGRAMA ESTRUCTURAL DE LA UNIDAD 3

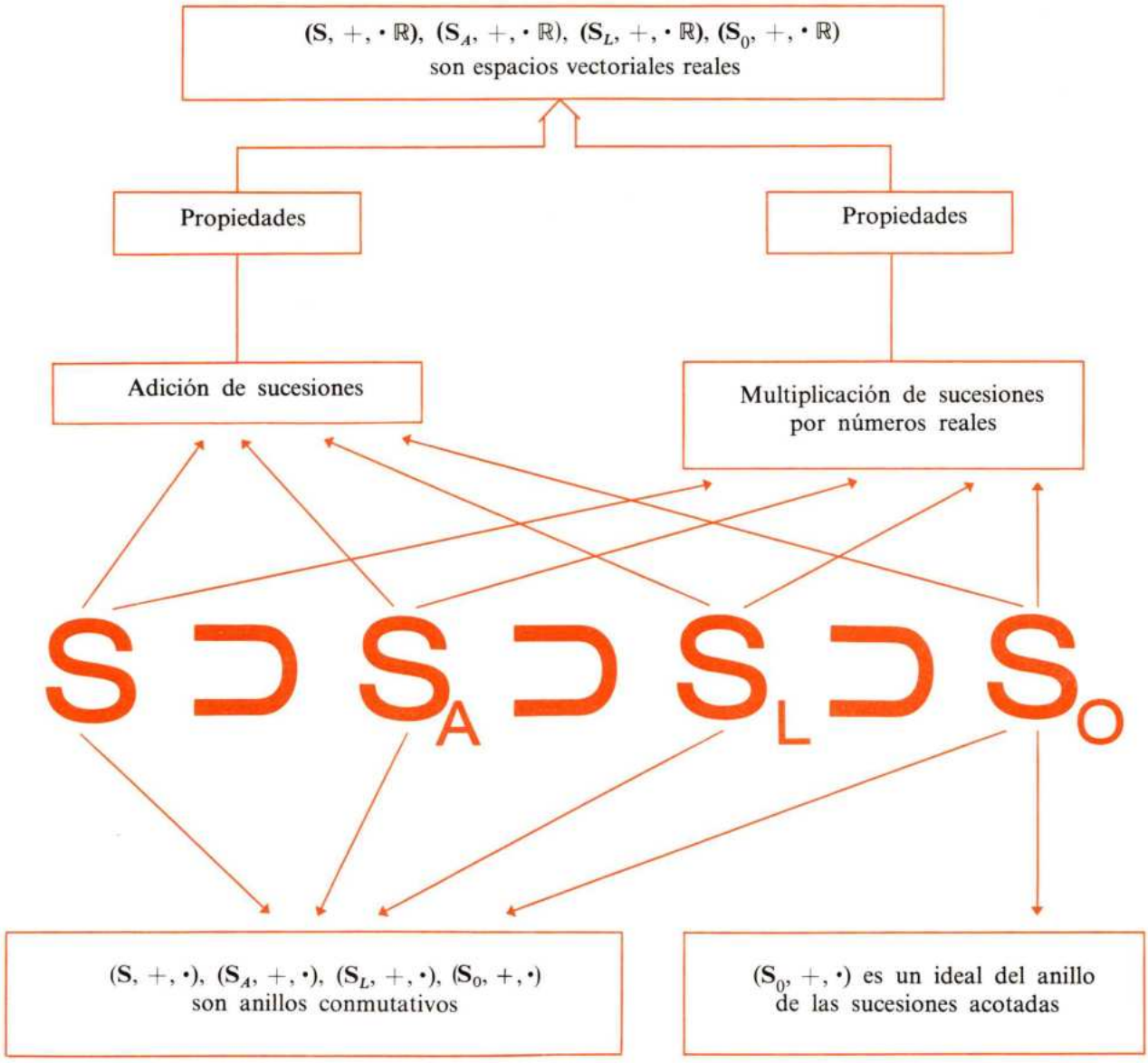
SUCESIONES. LIMITES. EL NUMERO e

$\mathbf{S} = \{\text{Sucesiones de números reales}\}$

$\mathbf{S}_A = \{\text{Sucesiones acotadas}\}$

$\mathbf{S}_L = \{\text{Sucesiones convergentes}\}$

$\mathbf{S}_0 = \{\text{Sucesiones nulas}\}$



Unidad 4 FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL. LIMITE Y CONTINUIDAD.

En el curso anterior se estudió el anillo de las funciones o aplicaciones del cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales en sí mismo, considerando las funciones polinómicas como un subanillo de dicho anillo.

La orientación del presente curso como una introducción al Análisis hace que el concepto de función como sinónimo de aplicación sea muy restrictivo al no incluir correspondencias tan elementales y de tanta importancia como son las $x \longrightarrow \frac{1}{x}$, $x \longrightarrow \frac{1}{x-1}$, etc.

Parece entonces conveniente adoptar un punto de vista más general, dando una nueva definición de función que abarque estas correspondencias y otras muchas.

Las funciones reales de variable real con el mismo dominio pueden contemplarse con dos estructuras algebraicas: la de anillo y la de espacio vectorial; éste es el objeto del tema 12. Las propiedades de simetría, monotonía y acotación son tratadas en el tema 13. El concepto de límite, que quizá sea el más importante y difícil del cálculo infinitesimal, se estudia en el tema 13.

Finaliza la Unidad con el estudio de la continuidad, en el tema 14.

Tema 11

1. Funciones reales de variable real.
2. Representación gráfica de una función.
3. Adición de funciones.
4. Propiedades de la adición de funciones.
5. El grupo $(\mathcal{F}(D, \mathbb{R}), +)$.
6. Multiplicación de funciones.
7. Propiedades de la multiplicación de funciones.
8. El anillo $(\mathcal{F}(D, \mathbb{R}), +, \cdot)$.
9. Multiplicación de una función por un número real: Propiedades.
10. El espacio vectorial $(\mathcal{F}(D, \mathbb{R}), +, \cdot \mathbb{R})$.
11. Composición de funciones.
12. Función identidad.
13. Función recíproca.

Tema 12

1. Simetrías de una función.
2. Funciones monótonas crecientes.
3. Funciones monótonas decrecientes.
4. Propiedades de las funciones monótonas.
5. Cociente incremental.
6. Funciones acotadas.
7. Propiedades de las funciones acotadas.

Tema 13

1. Límite de una función: Ideas previas.
2. Límite de una función en un punto: Definiciones.
3. Propiedades de los límites.
4. Límites y operaciones con funciones.
5. Límites infinitos.
6. Límites en el infinito. Asíntotas horizontales.
7. Ramas parabólicas.
8. Límites laterales.

Tema 14

1. Continuidad en un punto.
2. Criterios de continuidad.
3. Continuidad y operaciones con funciones.
4. El espacio vectorial de las funciones continuas en $]a, b[$.
5. Algunos ejemplos importantes de funciones continuas.
6. El anillo de las funciones continuas.
7. Discontinuidades de una función.

Tema 11 OPERACIONES CON FUNCIONES

La primera parte de este tema está dedicada a establecer el concepto de función real de variable real.

Se definen después la suma y el producto de funciones con el mismo dominio, así como el producto de una función por un número real, llegándose a las estructuras de anillo y espacio vectorial para estas funciones.

Por último se estudia la función identidad y la función recíproca o inversa.

1 Funciones reales de variable real

1.1. Una *función real de variable real* es una aplicación f de un subconjunto no vacío D de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, es decir $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

El subconjunto D se llama el *dominio de definición de* f y se escribe $\text{Dom}(f)$ o simplemente D_f.

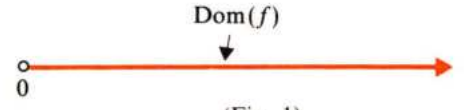
Así: la función de variable real definida para $x > 0$ por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es una función cuyo dominio es $D = \{x \mid x > 0\}$ (Fig. 1).

La función de variable real definida para $x \neq 0$ por $g(x) = \dfrac{1}{x}$ es una función cuyo dominio es $D' = \{x \mid x \neq 0\}$ (Fig. 2).

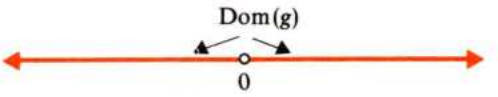
Este dominio D' es el mayor dominio en el cual tiene sentido la expresión $\dfrac{1}{x}$. De ahora en adelante, salvo que se diga lo contrario, al hablar del dominio de una función f nos referiremos al máximo dominio de f.

Ejemplos:

- Sea $a \in \mathbb{R}$ la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a$, $\forall x \in \mathbb{R}$; es una función real de variable real que se llama la *función constante de valor a* y cuyo dominio de definición es $D_f = \mathbb{R}$.
- La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ es una función real de variable real que se llama la *identidad de* $\mathbb{R}$ y se escribe $1_{\mathbb{R}}$ o simplemente 1, y su dominio de definición es todo $\mathbb{R}$.
- La función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{3x}{2x^2 - 4}$ es una función real de variable real cuyo dominio de definición es $D = D_f = \mathbb{R} - \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$, puesto que en $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ el denominador se anula y f no está definida.



(Fig. 1)



(Fig. 2)

Ejercicios:

1. Se considera la función $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $x \longrightarrow \dfrac{1}{x^2 + 6}$. ¿Es una función real de variable real? En caso afirmativo, halla su dominio de definición (es decir, su máximo dominio).

2. ¿Cuál es el dominio de definición de una aplicación polinómica?

3. Considera la función $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

¿Cuál es el dominio de definición de la función f?

- La función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 6 \\ \dfrac{3}{x^2 - 1} \text{ si } x < 0 \end{cases}$

  es una función real de variable real cuyo dominio es

  $$D = D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 6\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0,\ x \neq -1\}$$

1.2. Si f es una función real de variable real, es usual representar $f(x)$ por el símbolo y, escribiendo $y = f(x)$; en este caso se dice que x es la *variable independiente* e y la *variable dependiente.*

Ejemplo:

- Sea f definida por $f(x) = \dfrac{3 + 5x^2}{x}$; entonces f se suele escribir $y = \dfrac{3 + 5x^2}{x}$; x es la variable independiente e y la variable dependiente.

4. La correspondencia $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por el siguiente conjunto de pares

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

¿define una función real de variable real?

5. Si $x \longrightarrow f(x)$ es una función polinómica, ¿cuál es el dominio de definición de la función dada por la correspondencia

$$x \longrightarrow \frac{1}{f(x)}?$$

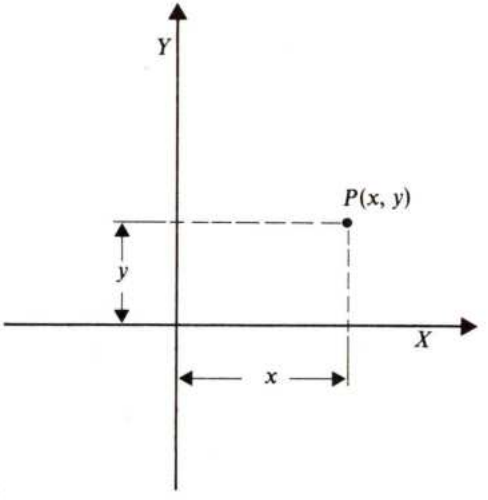
2 Representación gráfica de una función

Consideremos en el plano $\mathbb{R}^2$ un sistema de coordenadas rectangulares con origen O y ejes de coordenadas OX, OY. Se sabe que a cada punto del plano corresponde, de forma única, un par de números reales (x, y) que se llaman las *coordenadas cartesianas del punto P* (Fig. 3).

Sea f una función. A cada $x \in \text{Dom}(f)$ le corresponde un único número real $f(x)$ que es la imagen de x por f; entonces queda determinado un conjunto $T = \{(x, f(x)) \mid x \in \text{Dom}(f)\}$ que se denomina la *gráfica* o el *grafo de f*, y este conjunto de pares de números reales determina en el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un conjunto de puntos que son los elementos de T; este conjunto de puntos, representados en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, se llama la *representación gráfica de f.*

De ahora en adelante utilizaremos los ejes cartesianos rectangulares para representar funciones.

En el curso anterior ya se ha visto la representación gráfica de ciertos tipos particulares de funciones: las polinómicas de grado menor o igual que 2 y las funciones escalonadas.



(Fig. 3)

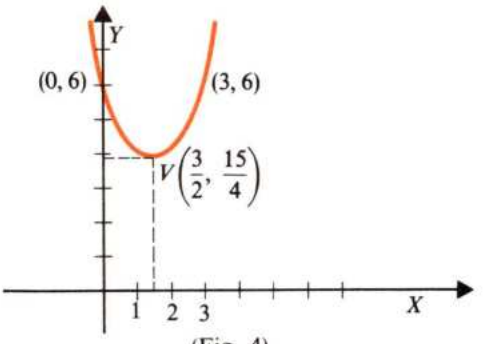
Ejemplo:

- La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en todo $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = x^2 - 3x + 6$$

representa una parábola de vértice el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$ (Fig. 4), ya que

$$f(x) = x^2 - 3x + 6 = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 6 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}$$



(Fig. 4)

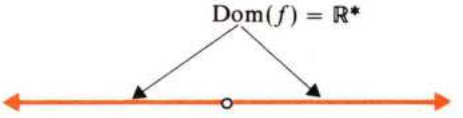
3 Adición de funciones

3.1. Sean f y g dos funciones tales que $\text{Dom}(f) = D_1$ y $\text{Dom}(g) = D_2$.

Si $D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$ se define la suma de f y g, y se representa por $f + g$, la función definida por

$$\mathbf{(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall x \in D_1 \cap D_2}$$

Obsérvese que $\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$, y que si $\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \varnothing$, no está definida la suma de f y g.



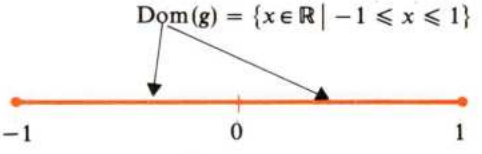
Ejemplos:

- Sean $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ definida para todo $x \neq 0$ por $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $g : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en $D' = [-1, 1]$ por $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$; entonces en la figura 5 se ve que $\text{Dom}(f + g) =$

$$= \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ x \neq 0\}$$

y en dicho dominio la función $f + g$ viene definida por:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt{1 - x^2}$$



- Consideremos la función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en

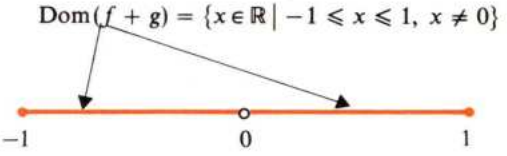
$$\text{Dom}(f) = D = \{x \mid x \geqslant 0\} \quad \text{por} \quad f(x) = \sqrt{x}$$

y la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en todo $\mathbb{R}$ por $g(x) = 3x$; entonces

$$\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$$

y en dicho dominio se tiene:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + 3x$$



(Fig. 5)

- Sean las funciones

$$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \text{ definida por } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x > 0 \\ x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

y

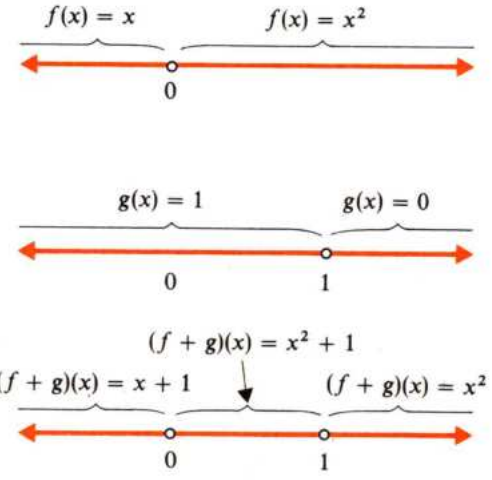
$$g : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ definida por } g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x > 1 \\ 1 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

Se tiene $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^*$ y $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{1\}$; entonces

$$\text{Dom}(f + g) = \mathbb{R}^* \cap (\mathbb{R} - \{1\}) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

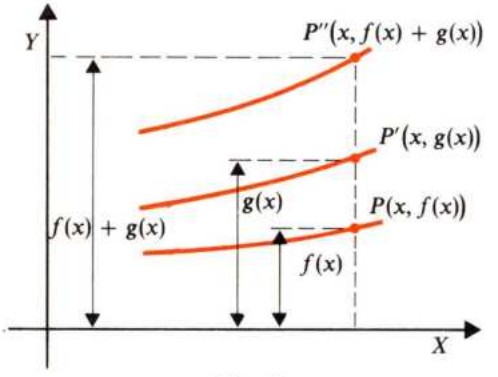
La figura 6 muestra gráficamente cómo podemos hallar $f + g$.

$$(f + g)(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$



(Fig. 6)

3.2. Sean f y g dos funciones tales que $f + g$ está definida; entonces, si conocemos la gráfica de f y g, es sencillo hallar la de $f + g$, pues como por definición $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, resulta que la ordenada del punto de la gráfica de $f + g$ correspondiente a la abscisa x es la suma de las correspondientes ordenadas de f y g. (Fig. 7.)

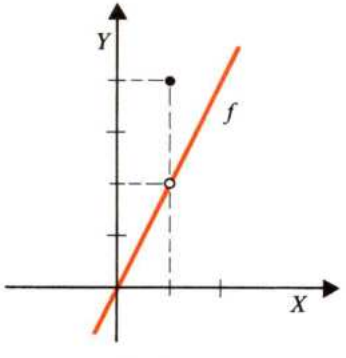


(Fig. 7)

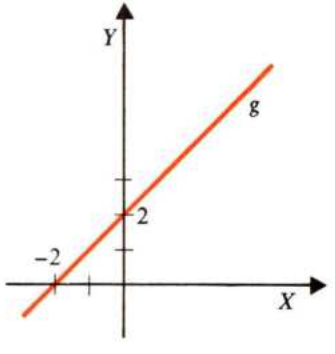
3.3. Sean f y g dos funciones de variable real definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 4 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases} \qquad g(x) = x + 2, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Las funciones f y g se han representado en las figuras 8 y 9 respectivamente.



(Fig. 8)



(Fig. 9)

La función $f + g$ viene definida del modo siguiente:

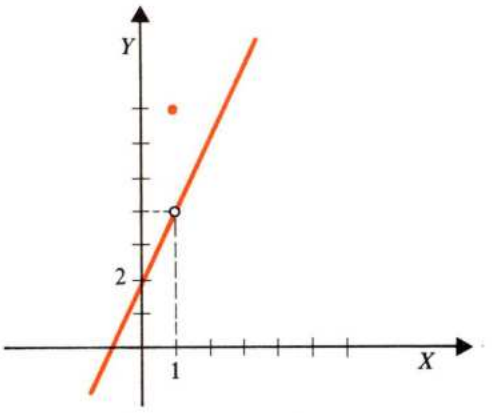
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 7 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

ya que si $x \neq 1$, $f(x) + g(x) = 2x + x + 2 = 3x + 2$,

y si $x = 1$, entonces

$$f(1) + g(1) = 4 + 3 = 7$$

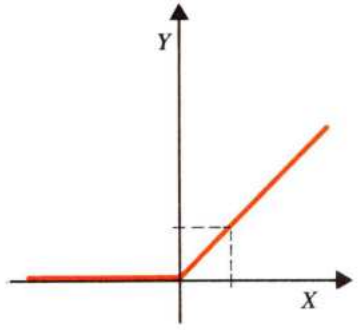
En la figura 10 se ha representado la función $f + g$.



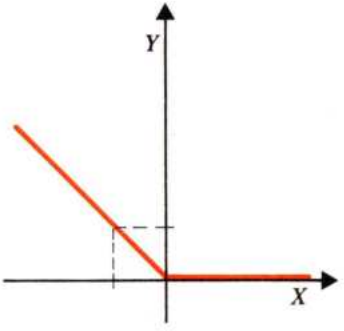
(Fig. 10)

3.4. Consideremos ahora las funciones f y g siguientes:

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -x \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{(Figs. 11 y 12)}$$



(Fig. 11)

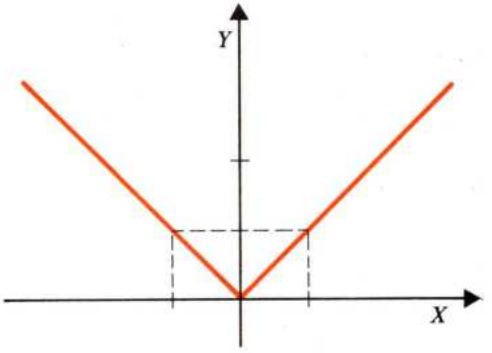


(Fig. 12)

La función $f + g$ viene definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

La gráfica de $f + g$ puede verse en la figura 13.



(Fig. 13)

4 Propiedades de la adición de funciones

4.1. *Asociativa:* Si f, g, h son tres funciones reales, el dominio donde $f + (g + h)$ está definida es

$$\text{Dom}\,(f) \cap \text{Dom}\,(g) \cap \text{Dom}\,(h),$$

entonces $(f + g) + h$ está definida en el mismo dominio y se tiene:

$$f + (g + h) = (f + g) + h$$

4.2. *Conmutativa:* Si f y g son dos funciones reales, el dominio donde $f + g$ está definida es

$$\text{Dom}\,(f) \cap \text{Dom}\,(g),$$

entonces $g + f$ está definida en el mismo dominio y se tiene:

$$f + g = g + f$$

4.3. La función $\mathbf{0} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{0}(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, es tal que, para toda función f, $f + \mathbf{0}$ está definida en el mismo dominio de f, y se verifica: $f + \mathbf{0} = f$.

Ejemplo:

- Sea $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$; entonces

$$\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R}^*, \quad \text{y se tiene que}$$

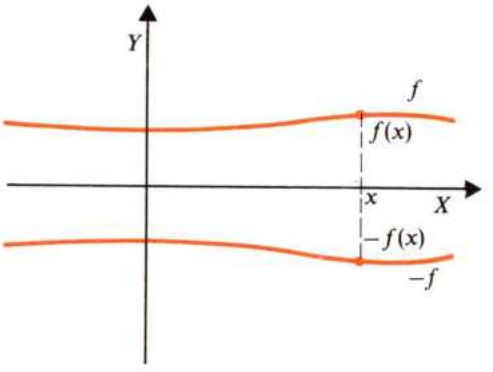
$$(f + \mathbf{0})(x) = f(x) + \mathbf{0}(x) = x^2 - \frac{1}{x} + 0 = x^2 - \frac{1}{x} = f(x)$$

es decir, $f + \mathbf{0} = f$.

4.4. Si f es una función real tal que $\text{Dom}\,(f) = D$, entonces la correspondencia $D \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $x \longrightarrow -f(x)$ define una función real llamada *opuesta de* f, que se escribe $-f$, y tal que

$$\text{Dom}\,(-f) = D \quad \text{y} \quad \big(f + (-f)\big)\,(x) = 0, \ \forall x \in D.$$

Si conocemos la gráfica de f, entonces como $(-f)(x) = -f(x)$, resulta que la gráfica de $-f$ tiene por ordenada en el punto de abscisa x la opuesta de la ordenada de f, es decir, la gráfica de $-f$ es la reflejada de la de f respecto al eje OX. (Fig. 14.)



(Fig. 14)

Ejemplo:

- Sea la función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$; el dominio de f es

$$D = \text{Dom}\,(f) = \mathbb{R} - \{1, -1\}$$

puesto que 1 y -1 son los valores que anulan el denominador; entonces

$$\text{Dom}\,(-f) = \mathbb{R} - \{1, -1\} \ \text{y} \ (-f)(x) = -f(x) = -\frac{1}{x^2 - 1};$$

se verifica que

$$(f + (-f))(x) = f(x) + \big(-f(x)\big) = \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 - 1} = 0$$

6. Halla el dominio de las funciones siguientes:

$f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

$g : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 - 6$

$h : D_3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \dfrac{6x}{x^2 + 4}$

y comprueba que $f + (g + h) = (f + g) + h$ y $f + g = g + f$.

7. Demuestra las propiedades **4.2.**, **4.3.** y **4.4.** de la suma de funciones.

8. ¿Cuál es el dominio de $f + g$ siendo f una función dada y g una función polinómica?

9. Sean P_1 y P_2 dos funciones polinómicas. ¿Cuál es el dominio de definición de

$$\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2}?$$

4.5. Si f y g son dos funciones reales tales que

$$\text{Dom}\,(f) \cap \text{Dom}\,(g) \neq \emptyset$$

entonces, como $\text{Dom}\,(-g) = \text{Dom}\,(g)$, se tiene que

$$\text{Dom}\,(f) \cap \text{Dom}\,(-g) \neq \emptyset$$

luego $f + (-g)$ está definida.

A esta suma se le llama la diferencia de f y g, y se escribe $f - g$.

Ejemplo:

- Sean $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ y $g(x) = \dfrac{1}{6x-3}$ dos funciones de variable real.

  Con $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ y $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ se tiene:

  $$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{6x-3} = \frac{5x-4}{(6x-3)(x+1)}$$

  siendo $\text{Dom}\,(f-g) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}, -1\right\}$

10. Dadas las funciones

$$y_1 = \frac{x}{2x-1}, \quad y_2 = \frac{3x-2}{x+1},$$

halla su dominio y calcula $y_1 + y_2$ e $y_1 - y_2$.

5 El grupo $(\mathcal{F}(D, \mathbb{R}), +)$

Sea D un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$; por $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ representaremos el conjunto de todas las funciones reales de variable real cuyo dominio es D; en este caso si $f, g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, entonces

$$\text{Dom}\,(f) \cap \text{Dom}\,(g) = D \cap D = D \neq \emptyset$$

es decir: que $f + g$ está siempre definida, y además

$$\text{Dom}\,(f+g) = \text{Dom}\,(f) \cap \text{Dom}\,(g) = D$$

es decir:

$$f + g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$$

Se tiene entonces que la suma es una operación interna en $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$.

De las propiedades estudiadas en **4.** se sigue que: $(\mathcal{F}(D, \mathbb{R}), +)$ *es un grupo abeliano que se llama el grupo de las funciones reales con dominio* D.

6 Multiplicación de funciones

Sean f y g dos funciones reales con

$$\text{Dom}\,(f) = D_1 \quad \text{y} \quad \text{Dom}\,(g) = D_2.$$

Si $D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$, se define el producto de f y g, y se escribe fg o $f \cdot g$, del modo siguiente:

$$\mathbf{(fg)(x) = f(x) \cdot g(x),\ \forall x \in D_1 \cap D_2}$$

Obsérvese que, igual que sucede en la suma, el producto no está definido si $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ y que $\text{Dom}(fg) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$.

Ejemplos:

- Sean las funciones $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ y $g : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sqrt{x}$,

$$\text{Dom}\,(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$$

y $$D' = \text{Dom}\,(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\},$$

entonces $\text{Dom}\,(fg) = \text{Dom}\,(f) \cap \text{Dom}\,(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$

y en este dominio la función fg viene definida por

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x^2 - 1} \cdot \sqrt{x}$$

- Si la función $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ viene definida por $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x > 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

y la función $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ viene definida por $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R}^*$ y $\text{Dom}\,(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

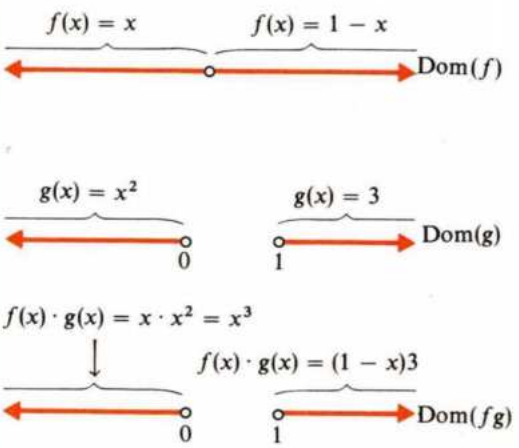
entonces

$\text{Dom}\,(f) \cap \text{Dom}\,(g) = \text{Dom}\,(g)$, ya que $\text{Dom}\,(g) \subset \text{Dom}\,(f)$,

y se tiene

$$(fg)(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x < 0 \\ 3(1 - x) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

(Fig. 15)



(Fig. 15)

11. Se dan las funciones

$$f : \mathbb{R} - \{-2, 2\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 - 6$$

Halla fg, especificando los dominios de f, g y de fg.

12. Multiplica las funciones f y g dadas por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < -1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

¿Cuál es el dominio de la función $f \cdot g$?

7 Propiedades de la multiplicación de funciones

El producto de funciones tiene las siguientes propiedades:

7.1. *Asociativa:* Si f, g y h son tres funciones reales tales que $f(gh)$ está definida, entonces $f(gh)$ está definida en el mismo dominio y se tiene $(fg)h = f(gh)$.

7.2. *Conmutativa:* Si f y g son dos funciones reales tales que fg está definida, entonces gf está definida en el mismo dominio, y se tiene $f \cdot g = g \cdot f$.

7.3. La función $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $u(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, es tal que $\text{Dom}\,(u) = \mathbb{R}$, y se tiene que para toda función f, $fu = f$.

La función u se escribe también $1_{\mathbb{R}}$. (Ver apartado **12.**)

7.4. *Distributiva:* Si f, g y h son tres funciones reales tales que $f(g + h)$ está definida, entonces $fg + fh$ está definida en el mismo dominio y se verifica:

$$f(g + h) = fg + fh$$

7.5. Sea f una función real de dominio D y sea

$$D_0 = \{x \in D \mid f(x) \neq 0\}$$

Entonces, si $D_0 \neq \emptyset$, la correspondencia $D_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $x \longrightarrow \dfrac{1}{f(x)}$ define una función con dominio D_0 que se llama la *inversa de* f y se escribe $\dfrac{1}{f}$; se tiene $f \cdot \dfrac{1}{f} = u$.

Obsérvese que:

$$\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$$

Ejemplo:

- Sea la función $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$, entonces

$$\text{Dom}\,(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R}^*, \text{ y}$$

$$D_0 = \{x \in \text{Dom}\,(f) \mid f(x) \neq 0\} = \text{Dom}\,(f);$$

se tiene entonces que

$$\text{Dom}\left(\frac{1}{f}\right) = D_0 = \text{Dom}\,(f) \text{ y que } \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

es decir:

$$\frac{1}{f}(x) = x$$

13. Comprueba las propiedades **7.2.** y **7.4.** del producto de funciones.

14. Halla el dominio de definición de $\dfrac{1}{f}$, siendo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = x^2 - 1$$

15. Idem si f está dada por $f(x) = x^2 - 4$.

16. Idem si f está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{si} \quad x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

17. Escribe dos funciones, halla su dominio de definición y comprueba que el producto es conmutativo.

18. Si f es una función polinómica y g es una arbitaria, ¿cuál es el dominio de fg?

19. Si f y g son funciones reales, se define el *cociente* $\dfrac{f}{g}$ como $f \cdot \dfrac{1}{g}$. ¿Cuál es el dominio de $\dfrac{f}{g}$?

20. Sean $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 6x - 1$. Halla $\dfrac{f}{g}$.

8 El anillo $(\mathcal{F}(D, \mathbb{R}), +, \cdot)$

Sea D un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Si $f, g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, entonces

$$\text{Dom}(f) = D \quad \text{y} \quad \text{Dom}(g) = D,$$

luego

$$\text{Dom}(fg) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = D \cap D = D \neq \emptyset,$$

es decir, $fg \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, luego la multiplicación de funciones es una operación interna en $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$.

Como $(\mathcal{F}(D, \mathbb{R}), +)$ es un grupo abeliano, de las propiedades estudiadas en **7.** se sigue que $(\mathcal{F}(D, \mathbb{R}), +, \cdot)$ *es un anillo conmutativo con unidad que se llama el anillo de las funciones reales de variable real definidas sobre D.*

9 Multiplicación de una función por un número real: Propiedades

9.1. Sea f una función real con dominio D y sea $a \in \mathbb{R}$. Se define el producto de a por f, y se escribe af, como la función definida por $\mathbf{(af)(x) = a \cdot f(x)}$.

Obsérvese que **Dom (af) = Dom (f).**

Ejemplos:

- Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 + 4}$

  $$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}, \quad \text{entonces} \quad 3f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

  viene definida por

  $$(3f)(x) = 3 \cdot f(x) = 3 \cdot \frac{3x - 1}{x^2 + 4} = \frac{9x - 3}{x^2 + 4}$$

- Sea $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 6x^2 - 3 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

  entonces $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^*$ y $\dfrac{1}{2} f$ está definida por

  $$\left(\frac{1}{2} f\right)(x) = \frac{1}{2} f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } x > 0 \\ 3x^2 - \dfrac{3}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \text{Dom}\left(\frac{1}{2} f\right) = \mathbb{R}^*$$

21. Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $f(x) = x^2 - 1$.

Halla $\text{Dom}(f)$ y $3f$.

22. Sean las funciones reales dadas por

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{2x - 1}{3x + 1}$$

Halla $\dfrac{5}{4}(f + g)$ y $\dfrac{5}{4} f + \dfrac{5}{4} g$, y compara los resultados.

23. Demuestra que si $a \in \mathbb{R}$, $a(-f) = -(af)$.

24. ¿Ves alguna relación entre el producto de un número real por una función real y el producto de dos funciones reales, una de las cuales es constante?

9.2. *Propiedades:*

a) Si $a, b \in \mathbb{R}$ y f es una función real, se verifica $(a + b)f = af + bf$.

b) Si a, $b \in \mathbb{R}$ y f es una función real, se tiene $(ab)f = a(bf)$.

c) $1 \cdot f = f$, para toda función real f.

d) Si $a \in \mathbb{R}$ y f y g son funciones reales, $a(f + g) = af + ag$.

9.3. Como ejemplo demostraremos la propiedad a) de **9.2.**, dejando como ejercicios la demostración de las restantes.

$$[(a + b)f](x) = (a + b)f(x) \overset{①}{=} af(x) + bf(x) \overset{②}{=}$$
$$\overset{②}{=} (af)(x) + (bf)(x) \overset{③}{=} (af + bf)(x),$$

de donde

$$(a + b)f = af + bf$$

En ① se ha utilizado la distributividad del producto de números reales respecto de la suma; en ② la definición de producto de un número real por una función, y en ③ la definición de suma de funciones reales.

25. Demuestra las propiedades b) y c) de **9.2.**

26. ¿Cuál es la función $0 \cdot f$?

27. Sean f y $g : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones definidas por $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ y

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x > 1 \\ 3x^2 - 4 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Comprueba, tomando $a = 3$, la propiedad

$$a(f + g) = af + ag$$

10 El espacio vectorial $(\mathcal{F}(D, \mathbb{R}), +, \cdot\, \mathbb{R})$

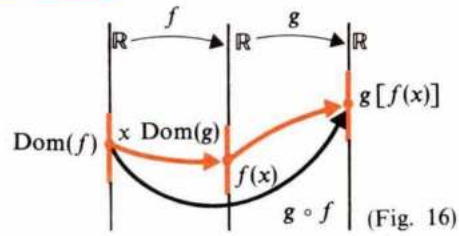
Sea D un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Se ha visto que $(\mathcal{F}(D, \mathbb{R}), +)$ es un grupo abeliano; de las propiedades estudiadas en **9.** se sigue que $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ *con la suma de funciones y el producto por números reales es un espacio vectorial real que se llama el espacio vectorial de las funciones reales de variable real definidas sobre* D.

11 Composición de funciones

Sean f, g dos funciones reales. Hemos visto en el tema 1 que se puede definir la composición $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ del modo siguiente: $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \mathbf{g}\,[\mathbf{f}(\mathbf{x})]$

y se tiene

$$\mathbf{D} = \mathbf{Dom}\,(\mathbf{g} \circ \mathbf{f}) \subset \mathbf{Dom}\,(\mathbf{f}).$$ (Fig. 16.)



(Fig. 16)

Ejemplo:

- Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x$ y $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \dfrac{3x+1}{6x}$; entonces $g \circ f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ viene definida por $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$.

  Llamando u a $f(x)$, se tiene:

$$(g \circ f)(x) = g(u) = \frac{3u+1}{6u} = \frac{3(2x)+1}{6(2x)} = \frac{6x+1}{12x}$$

Observa que $\text{Dom}\,(g \circ f) = \mathbb{R}^*$, mientras que $\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$.

Ejemplos:

- Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ y $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ en $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$;

  entonces, llamando u a $f(x)$, se tiene:

$$u = f(x) = x^3$$

  luego:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{(x^3)^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^6-1}}$$

- Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 2x - 1$; entonces, haciendo $u = f(x) = x^2$, se tiene:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(u) = 2u - 1 = 2x^2 - 1.$$

Dada una función f, con frecuencia es conveniente descomponerla en otras dos, h y g, cuya composición nos dé la función f, es decir, que se verifique: $f = h \circ g$.

Ejemplo:

- Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x^6$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$ y $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = 3x^3$; entonces

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(u) = 3u^3 = 3(x^2)^3 = 3x^6 = f(x)$$

  de aquí que $h \circ g = f$.

28. Sean $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 5x - 3$.

Halla $(g \circ f)(3)$ y $(g \circ f)(-1)$.

29. Halla la composición $g \circ f$ de las funciones

$$f(x) = 3x^2 - 1$$
$$g(x) = 4x$$

30. Idem de $f(x) = 5x$ y $g(x) = \dfrac{2}{6x-1}$, hallando previamente $\text{Dom}\,(f)$ y $\text{Dom}\,(g)$. ¿Cuál es $\text{Dom}\,(g \circ f)$?

31. Escribe tres funciones, f, g y h, y comprueba con dichas funciones que

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

32. Haz la descomposición de las siguientes funciones:

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^3 + 2x + 1)^4$.

b) $g : \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{3}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{6x-2}$.

c) $t : \mathbb{R} - \left\{\dfrac{-3}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t(x) = \dfrac{6x-1}{2x+3}$.

d) $s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $s(x) = 6x - 2$.

33. Halla las composiciones $h \circ (g + f)$, $h \circ g$ y $h \circ f$ y comprueba que

$$h \circ (g + f) \neq (h \circ g) + (h \circ f),$$

donde f, g y h son las funciones

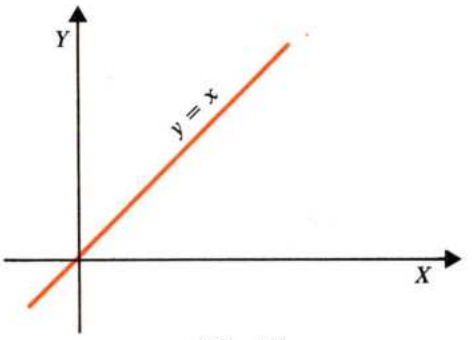
$$h(x) = \frac{1}{x-1}, \quad g(x) = x^2 \quad \text{y} \quad f(x) = 6x.$$

12 Función identidad

Recordemos del tema 1 que se llama *función identidad sobre* $\mathbb{R}$, y se escribe $1_{\mathbb{R}}$ o simplemente 1, a la aplicación $1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{1_{\mathbb{R}}(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}}$.

En notación de variable dependiente e independiente, la función identidad se escribe $y = x$.

La representación gráfica de la función identidad aparece en la figura 17 y corresponde a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.



(Fig. 17)

Si f es una función arbitraria, se tiene $1_{\mathbb{R}} \circ f = f = f \circ 1_{\mathbb{R}}$.

En efecto,

$$(1_{\mathbb{R}} \circ f)(x) = 1_{\mathbb{R}}[f(x)] = f(x) \Longrightarrow 1_{\mathbb{R}} \circ f = f$$

$$(f \circ 1_{\mathbb{R}})(x) = f[1_{\mathbb{R}}(x)] = f(x) \Longrightarrow f \circ 1_{\mathbb{R}} = f$$

Nota: Aunque $f \circ 1_{\mathbb{R}} = 1_{\mathbb{R}} \circ f$, en general para dos funciones arbitrarias, g y f, se tiene que $g \circ f \neq f \circ g$.

En efecto, sea

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = x + 1$

entonces:

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(u) = u + 1 = x^2 + 1$

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(v) = v^2 = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

luego $g \circ f \neq f \circ g$

34. Dadas las funciones $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = x^3$, halla $f(0)$, $g(1)$, $(g \circ f)(2)$ y $(f \circ g)(2)$.

Comprueba que $(g \circ f)(2) \neq (f \circ g)(2)$. Deduce entonces que la composición de funciones *no* es conmutativa.

13 Función recíproca

13.1. Sea f una función real de dominio D e inyectiva; entonces si $D' = \text{Im}(f)$, se define una función llamada *recíproca de* f, que se representa por f^{-1}, cuyo dominio es D' y definida por $f^{-1}(x) = y$ tal que $f(y) = x$.

Ejemplos:

- La función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ por $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es inyectiva, pues

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow \sqrt[3]{x_1} = \sqrt[3]{x_2} \Longrightarrow x_1 = x_2$$

de aquí que se puede definir la función recíproca $f^{-1} : D' \longrightarrow D$ donde $D' = D$ definida por $f^{-1}(x) = y$ donde $f(y) = x$, es decir

$$f(y) = \sqrt[3]{y} = x,$$

de donde $y = x^3$, por tanto

$$f^{-1}(x) = y = x^3.$$

- Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - 1$; como

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Longrightarrow x_1 = x_2$$

resulta que f es inyectiva.

La función recíproca $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ viene definida por $f^{-1}(x) = y$, donde $f(y) = x$; como $f(y) = y - 1$, se tiene

$$y - 1 = x \Longrightarrow y = x + 1$$

luego

$$f^{-1}(x) = y = x + 1$$

13.2. Teorema:

Si f tiene función recíproca, entonces $f \circ f^{-1} = 1_D$; $f^{-1} \circ f = 1_{D'}$.

Los esquemas siguientes:

$$D \xrightarrow{f^{-1}} D' \xrightarrow{f} D \qquad D' \xrightarrow{f} D \xrightarrow{f^{-1}} D'$$

$$x \longrightarrow y \longrightarrow x \qquad y \longrightarrow x \longrightarrow y$$

muestran que $f \circ f^{-1} = 1_D$ y $f^{-1} \circ f = 1_{D'}$.

En efecto:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = f(y) = x = 1_D(x)$$

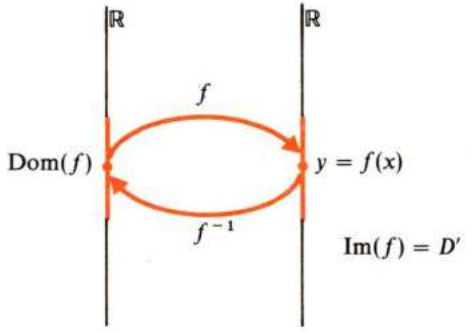
$$(f^{-1} \circ f)(y) = f^{-1}[f(y)] = f^{-1}(x) = y = 1_{D'}(x)$$

En la figura 18 se observa que la actuación de f^{-1} consiste en cierto modo en dar la vuelta a f.

Veamos cuál es la gráfica de f^{-1}. En primer lugar recordemos que $y = f^{-1}(x)$ si y sólo si $f(y) = x$. Sean Γ_f y $\Gamma_{f^{-1}}$ las gráficas de f y f^{-1} respectivamente. Un punto P de coordenadas (x, y) pertenece a $\Gamma_{f^{-1}}$ si y sólo si $y = f^{-1}(x)$, entonces:

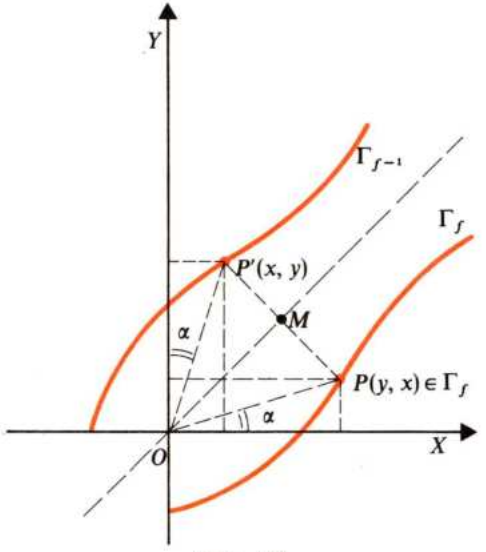
$$(x, y) \in \Gamma_{f^{-1}} \Longleftrightarrow y = f^{-1}(x) \Longleftrightarrow f(y) = x \Longleftrightarrow (y, x) \in \Gamma_f$$

Es decir, un punto (x, y) está en la gráfica de f^{-1} si y sólo si el punto (y, x) está en la gráfica de f. En la figura 19 se ve que el triángulo OPM es igual al $OP'M$, de donde $P'M = PM$, es decir, que la gráfica de $\Gamma_{f^{-1}}$ es simétrica de la de Γ_f respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.



$$x = f^{-1}(y) \Longleftrightarrow f(x) = y$$

(Fig. 18)



(Fig. 19)

35. Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$. Demuestra que f es inyectiva y calcula la función recíproca f^{-1}.

36. Calcula el dominio de definición de la función real de variable real $f(x) = \dfrac{6}{x - 1}$. Demuestra que f es inyectiva y calcula la función recíproca f^{-1}.

Ejercicios y cuestiones

37. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ 2x + 6 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

demuestra que es inyectiva y calcula f^{-1}.

38. Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{6x}{2x - 1}$

b) $g(x) = x^2 + 4$

c) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 6}}$

d) $t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

39. Suma las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

40. Representa gráficamente las funciones del problema anterior y halla gráficamente la función suma.

41. Halla el producto de las funciones

$$f(x) = \frac{1}{3x - 1} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{2}{6x + 2}$$

¿Cuál es el dominio de definición de fg?

42. Halla el producto de las funciones del ejercicio **39.**

43. Si $P(x)$ es una función polinómica, ¿cuál es el dominio de definición de $\dfrac{P(x)}{2}$?

44. Calcula $f \circ g$ y $f \circ g$ si $g(x) = x^2$ y $f(x) = x^4 + 1$.

45. Haz la descomposición de las funciones siguientes:

$$f(x) = \sqrt{x^3} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{4}{5x + 3}$$

46. Halla la recíproca de la función $f(x) = \dfrac{1}{2x + 6}$. ¿Cuál es su dominio de definición?

47. Representa la función $y = 3x - 8$ y halla la gráfica de la función recíproca.

Tema 12 SIMETRIA, MONOTONIA Y ACOTACION

Para estudiar el comportamiento de una función es muy útil conocer su gráfica, y para obtener dicha representación gráfica podemos recurrir a estudiar ciertas particularidades de dicha función, entre las que por su sencillez e importancia destacan las simetrías, el crecimiento y la acotación. El presente tema tiene como objeto el estudio de estos conceptos.

1 Simetrías de una función

Si observamos las representaciones gráficas de la figura 1, se nota que mientras que las gráficas b) y c) presentan la particularidad de que el conocimiento de una parte de la función es suficiente para conocerla completamente, no sucede igual con la gráfica a).

Observemos también que en b) la gráfica queda determinada si conocemos cómo es para valores positivos de la variable independiente, pues la parte de gráfica correspondiente a valores negativos es la reflejada en el eje OY de la parte correspondiente a los valores positivos. Análogamente, en la gráfica c) se ve que la parte de gráfica correspondiente al tercer cuadrante es semejante a la del primer cuadrante.

Vamos a formalizar estos conceptos:

1.1. *Una función real f se dice que es par, y su gráfica simétrica respecto al eje OY, si $\forall x \in Dom(f)$ se tiene:*

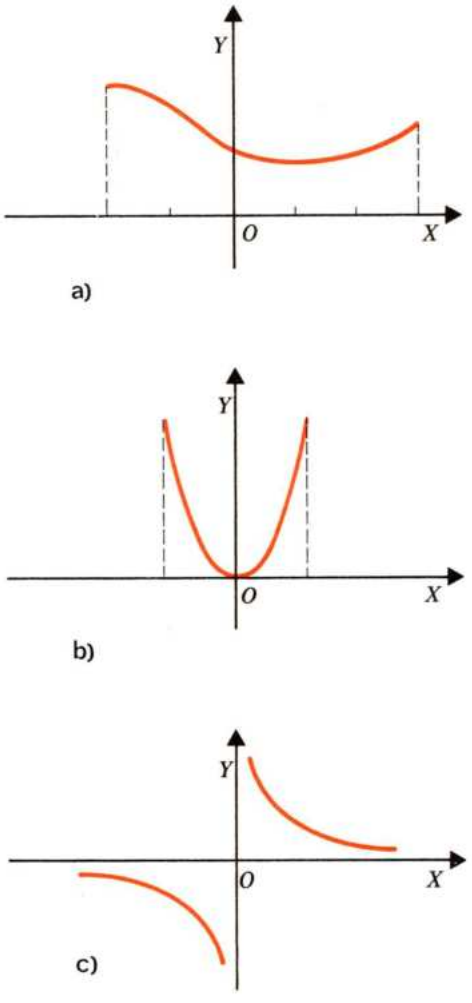
a) $-\mathbf{x} \in \mathbf{Dom(f)}$

b) $\mathbf{f(-x) = f(x)}$

La condición a) se verifica siempre que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

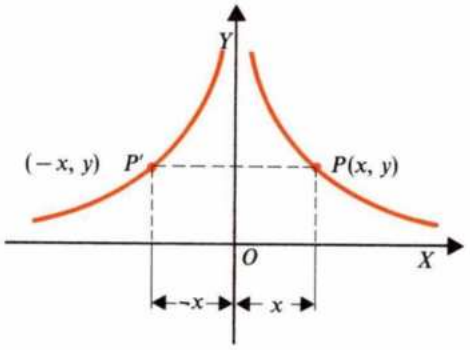
Ejemplos:

- La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ es par y su gráfica es simétrica respecto al eje OY, pues
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$
- Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 3x$; entonces g *no* es par, pues
$$g(-x) = 3(-x) = -3x \neq 3x = g(x)$$



(Fig. 1)

En la figura 2 se ve que si el punto (x, y) pertenece a la gráfica de f, y f es par, entonces $(-x, y)$ debe pertenecer también a la gráfica de f, luego la parte de la gráfica de f correspondiente a valores negativos de la variable independiente es la reflejada respecto al eje OY de la correspondiente a los valores positivos.



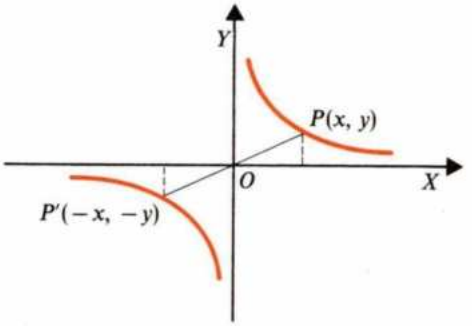
(Fig. 2)

1.2. *Una función f se dice que es impar, y su gráfica simétrica respecto al origen, si $\forall x \in Dom(f)$ se tiene:*

a) $-\mathbf{x} \in \mathbf{Dom(f)}$

b) $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$

Si un punto P de coordenadas (x, y) pertenece a la gráfica de f, entonces $y = f(x)$ y, por tanto, $-y = -f(x) = f(-x)$, luego el punto P' de coordenadas $(-x, -y)$ está en la gráfica de f. (Fig. 3.)



(Fig. 3)

Ejemplos:

- La función $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es tal que

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$$

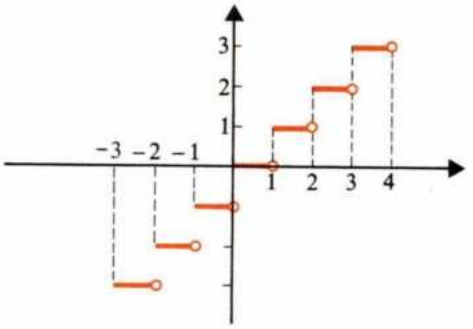
luego es impar; su gráfica es la de la figura 1 (c).

- La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$ se llama la función *valor absoluto;* se escribe normalmente $f(x) = |x|$ y se lee *valor absoluto de* x. Como $|x| = |-x|$, entonces $f(x) = f(-x)$ y f es par.

- Sea $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida de la siguiente forma: $E(x)$ *es el mayor entero menor o igual que* x, por ejemplo $E(3) = 3$, $E(5{,}5) = 5$, $E(-7{,}2) = -8$; la gráfica de la función E es la de la figura 4; E se llama la función *parte entera* y $E(x)$ la *parte entera de* x.

  De la gráfica de E se sigue que E *no* es par *ni* impar; también se puede ver esto observando que:

$$E(-3{,}2) = -4 \neq E(3{,}2) = 3 \Longrightarrow E \text{ } no \text{ es par}$$
$$E(-3{,}2) = -4 \neq -E(3{,}2) = -3 \Longrightarrow E \text{ } no \text{ es impar}$$



(Fig. 4)

Ejercicios:

1. Calcula: $|E(3{,}1)|$, $|E(-3{,}2)|$

2. Calcula: $E(1{,}5)$, $E(3)$, $E(-2{,}8)$

3. ¿Son las siguientes funciones pares?

a) $f(x) = x^2$; b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$

2 Funciones monótonas crecientes

2.1. Sea f una función real con dominio D y $A \subset D$ un subconjunto no vacío de D; *se dice que f es monótona creciente en A si*

$$\forall x, y \in A,\ x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$

Una función se dice creciente si es monótona creciente en su dominio.

Sea f una función real, $a \in \mathrm{Dom}\,(f)$; *se dice que f es creciente en a si existe un entorno E de a tal que $f(x) \leqslant f(a) \leqslant f(x')$ para todo $x, x' \in E$ tal que $x < a < x'$.*

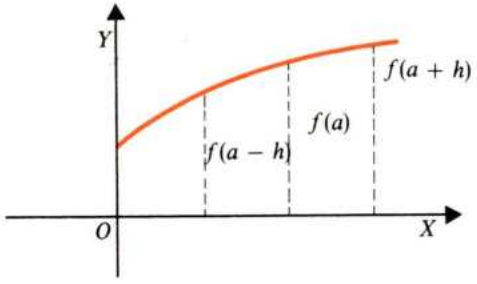
Es decir, la función f es creciente en el punto a cuando en un cierto entorno de este punto $]a - h, a + h[$, el valor $f(a)$ es mayor o igual que los situados a su izquierda y menor o igual que los situados a su derecha.

Si f es creciente en a, se verifica

$$f(a - h) \leqslant f(a) \leqslant f(a + h) \text{ (Fig. 5)}$$

siendo h positivo y suficientemente pequeño. O también, f es creciente en un punto $a \in \mathrm{Dom}\,(f)$ si existe un $h > 0$ tal que

$$f(x) \leqslant f(a) \quad \text{si} \quad x \in]a - h, a[$$
$$f(x) \geqslant f(a) \quad \text{si} \quad x \in]a, a + h[$$



(Fig. 5)

Ejemplo:

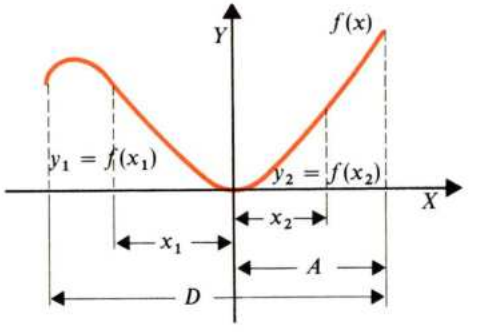
- Sea $f(x) = x^2$; $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Si $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, f es monótona creciente en A, pues si $x, y \geqslant 0$ y $x < y$, se verifica:

$$x^2 \leqslant y^2 \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$

Obsérvese, sin embargo, que f no es creciente, pues no es monótona creciente en todo su dominio, ya que

$$-3 < 1 \quad \text{y} \quad f(-3) = 9 > f(1) = 1$$

Resulta entonces que una función puede ser monótona creciente en un cierto conjunto y no ser creciente. (Fig. 6.)



(Fig. 6)

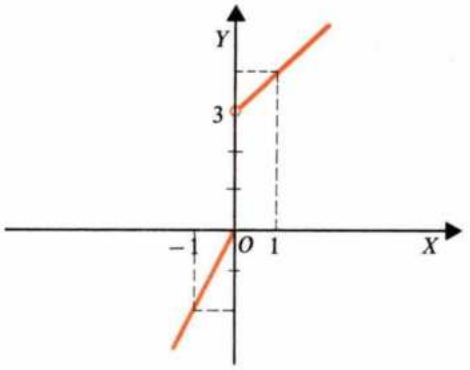
f es creciente en A pero no es creciente en D, ya que $x_1 < x_2$ y $f(x_1) > f(x_2)$

Ejemplo:

- Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ x + 3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

cuya gráfica es la de la figura 7. Se ve inmediatamente que f es creciente en $x = 0$, pues tomando el entorno $E =]-1, 1[$ f es creciente en E, como se observa en la figura.



(Fig. 7)

2.2. Teorema:

Una función afín $f(x) = ax + b$ es creciente si y sólo si $a \geqslant 0$.

En efecto: si $a \geqslant 0$ y si $x_1 < x_2$, entonces

$$ax_1 \leqslant ax_2 \Longrightarrow ax_1 + b \leqslant ax_2 + b \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

Recíprocamente: si f es creciente, entonces, como $0 < 1$, se tiene que

$$f(0) \leqslant f(1) \Longrightarrow b \leqslant a + b \Longrightarrow 0 \leqslant a.$$

2.3. *Una función real f se dice estrictamente creciente en $A \subset Dom(f)$ si*

$$\forall\, \mathbf{x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)}$$

Análogamente se definen las funciones *estrictamente crecientes en un punto* $x = a \in Dom\ (f)$.

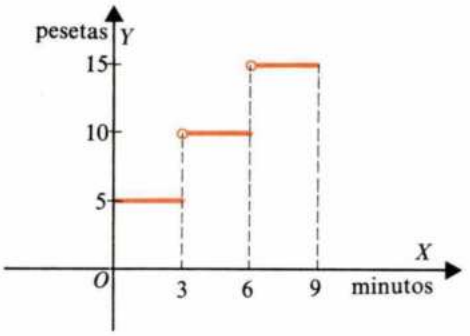
Evidentemente toda función estrictamente creciente es creciente, pues si $x_1 < x_2$, entonces

$$f(x_1) < f(x_2) \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

y f es creciente; sin embargo, una función puede ser creciente y *no* ser estrictamente creciente, como se ve en el siguiente ejemplo:

Ejemplo:

- Sea f la función que asocia a la duración de una llamada telefónica el importe de dicha llamada. Si cada tres minutos o fracción inferior de tiempo vale 5 ptas., la gráfica de la función es la de la figura 8. La función es evidentemente creciente, pero no es estrictamente creciente, pues $4 < 5$ y, sin embargo, $f(4) = 10$ y $f(5) = 10$, luego $f(4) \not< f(5)$.



(Fig. 8)

4. ¿Es creciente la función $f(x) = x^3$ en $A =]-1, 1[$?

5. ¿Es creciente la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0? \end{cases}$$

6. La suma de dos funciones crecientes en A es creciente en A. Demuéstralo.

7. De las siguientes funciones indica cuáles son creciente en $x = 0$:

a) $f(x) = x^2 - 1$.

b) $g(x) = 7x + 2$.

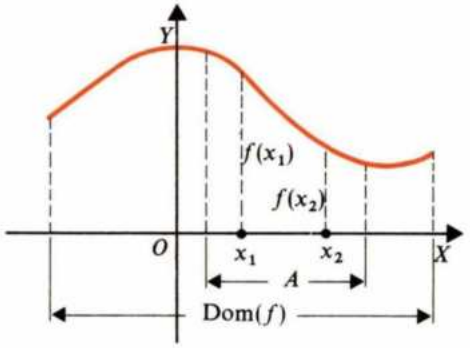
c) $h(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x > 1 \\ -1 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$

3 Funciones monótonas decrecientes

3.1. *Una función f se dice monótona decreciente en un subconjunto $A \subset Dom(f)$ si*

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_2) \leqslant f(x_1)$$

Como se ve en la figura 9, esto significa que en la gráfica de f restringida al subconjunto A, al crecer las abscisas disminuyen las correspondientes ordenadas.



(Fig. 9)

Ejemplos:

- La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es decreciente en $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, ya que si $x_1 < x_2$, entonces

$$\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} \Longrightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

- La función f constante en a es decreciente en $\mathbb{R}$, ya que

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow a \leqslant a \Longrightarrow f(x_2) \leqslant f(x_1).$$

Obsérvese que la función constante es también creciente.

3.2. Teorema:

La función afín $f(x) = ax + b$ es decreciente en $\mathbb{R}$ si y sólo si $a \leqslant 0$.

La demostración de este teorema es análoga a la del caso de funciones crecientes, y queda como ejercicio.

Las definiciones de *función estrictamente decreciente* y *función decreciente en un punto* son análogas a las correspondientes para funciones crecientes y pueden formularse como ejercicio.

8. La función $f(x) = 3x - 2$, ¿es decreciente en $\mathbb{R}$?

9. La función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, ¿es decreciente en

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}?$$

10. La función $f(x) = x^2 + 2x - 6$, ¿es creciente en el punto $x = 0$?

11. Demuestra que la suma de dos funciones decrecientes en A es decreciente en A.

12. Demuestra el teorema que afirma que $f(x) = ax + b$ es decreciente en $\mathbb{R}$ si y sólo si $a \leqslant 0$. ¿Cuándo es estrictamente decreciente?

4 Propiedades de las funciones monótonas

4.1. *Si una función f es monótona creciente en A y también monótona decreciente en A, entonces f es constante en A; es decir, f toma el mismo valor en todos los puntos de A.*

En efecto:

Por ser f monótona creciente en A, se tiene:

$$\forall x,\ y \in A,\ x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)\ \textcircled{1}$$

Por ser f monótona decreciente en A, se tiene:

$$\forall x,\ y \in A,\ x < y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)\ \textcircled{2}$$

De ① y ② resulta: $\forall x,\ y \in A;\ x < y \Longrightarrow f(x) = f(y) = c$,

luego f es una función constante.

4.2. *La composición de dos funciones crecientes es creciente.*

Sean g y f crecientes, entonces

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow g[f(x_1)] \leqslant g[f(x_2)] \Longrightarrow (g \circ f)(x_1) \leqslant (g \circ f)(x_2)$$

y $g \circ f$ es creciente.

Análogamente se puede probar que *la composición de dos funciones decrecientes es una función creciente.*

4.3. *Si f es estrictamente creciente, entonces f es inyectiva.*

Sea $f(x_1) = f(x_2)$; si $x_1 \neq x_2$, entonces uno de ellos sería estrictamente menor que el otro, por ejemplo $x_1 < x_2$ y entonces $f(x_1) < f(x_2)$, en contra de que $f(x_1) = f(x_2)$; luego $x_1 = x_2$ y f es inyectiva.

También se puede probar que si *f es creciente y tiene recíproca, f^{-1} es creciente.*

5 Cociente incremental

5.1. Sea f una función y $D = \text{Dom}(f)$, $a \in D$ y $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ tal que $a + h \in D$. Se define el *cociente incremental de f* en el punto a para un incremento h de la variable como

$$(\Delta f)_{a,h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ejemplos:

- Sea $f(x) = x^2$; entonces el cociente incremental de f en el punto 3 para el incremento $h = 2$ es

$$(\Delta f)_{3,2} = \frac{f(3+2) - f(3)}{2} = \frac{f(5) - f(3)}{2} = \frac{5^2 - 3^2}{2} = 8$$

si no especificamos h, se obtiene:

$$(\Delta f)_{3,h} = \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

que es una función de h.

- Sea $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$; entonces el cociente incremental de f en el punto 0 relativo a h es:

$$(\Delta f)_{0,h} = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\dfrac{1}{h+1} - 1}{h} = \frac{-1}{h+1}$$

Gráficamente el significado de $f(a+h) - f(a)$ es, como se ve en figura 9, el incremento de la variable dependiente cuando la abscisa a se incrementa en h, y $(\Delta f)_{a,h}$ es la medida del crecimiento de la función relativo al crecimiento de la variable.

La relación entre el crecimiento de una función y el cociente incremental viene dado por el siguiente teorema.

5.2. Teorema:

Una función f es creciente en A si y sólo si $\forall a \in A$, $\forall h \in \mathbb{R}^*$, tal que $a + h \in A$, se verifica: $(\Delta f)_{a,h} \geqslant 0$.

Demostración: Si f es creciente en A, entonces si $h > 0$, $a < a + h$, luego

$$f(a) \leqslant f(a+h) \Longrightarrow 0 \leqslant f(a+h) - f(a) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 0 \leqslant \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \Longrightarrow (\Delta f)_{a,h} \geqslant 0$$

Si $h < 0$, entonces

$$a + h < a \Longrightarrow f(a+h) \leqslant f(a) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 0 \leqslant f(a) - f(a+h) \Longrightarrow \frac{f(a) - f(a+h)}{h} \leqslant 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geqslant 0 \Longrightarrow (\Delta f)_{a,h} \geqslant 0$$

Recíprocamente: sea $x_1 < x_2$; entonces, tomando $h = x_2 - x_1 > 0$, se tiene

$$f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + h) - f(x_1) = (\Delta f)_{x,h} \cdot h \geqslant 0,$$

luego $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ y f es creciente.

13. Sea $f(x) = \dfrac{1}{2x-3}$. Halla $(\Delta f)_{0,4}$.

14. Sea $g(x) = x^6 - 5x + 2$. Halla $(\Delta f)_{1,h}$.

15. Demuestra, basándote en el teorema análogo para funciones crecientes, el siguiente resultado:

f es decreciente en A si y sólo si $\forall a \in A$, $\forall h \in \mathbb{R}^*$, tal que $a + h \in A$, se verifica: $(\Delta f)_{a,h} \leqslant 0$.

6 Funciones acotadas

6.1. *Una función f se dice acotada superiormente si existe un número real L tal que*

$$\forall x \in Dom(f),\ f(x) \leqslant L$$

Análogamente *se dice que f está acotada inferiormente si existe un número real l tal que*

$$\forall x \in Dom(f), \quad l \leqslant f(x)$$

Los números L y l, si existen, se llaman *cota superior* e *inferior* de f, respectivamente. Obsérvese que todo número mayor que L es otra cota superior y todo número menor que l es otra cota inferior. Es decir, si existe una cota, inferior o superior, existen infinitas cotas.

Ejemplos:

- La función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$ está acotada superiormente. En efecto, tomando $L = 1$ se ve que $\forall x \in \text{Dom}\,(f)\ \ \dfrac{x^2+1}{x^2+2} < 1$, pues el numerador de esta fracción es menor que el denominador.

- La función $y = \dfrac{x^4+1}{x^2+1}$ está acotada inferiormente, ya que tomando $l = 0$ se ve que $0 < f(x) = y = \dfrac{x^4+1}{x^2+1}$, puesto que como el numerador y denominador son siempre positivos, el cociente es siempre positivo.

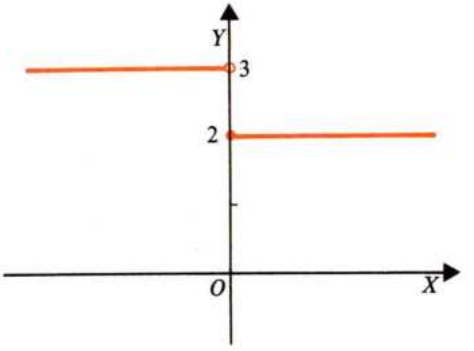
6.2. Una función f se dice *acotada* si está acotada superiormente e inferiormente. Esto quiere decir que existen dos números reales, l y L, tales que $\forall x \in \text{Dom}\,(f)$ se tiene:

$$l \leqslant f(x) \leqslant L$$

Ejemplo:

- La función $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$, cuya gráfica está dibujada en la figura 10, está acotada, pues como se ve en la figura

$$\forall x \in \text{Dom}\,(f),\ 2 \leqslant f(x) \leqslant 3$$



(Fig. 10)

16. Si L es una cota superior de f y si $L' > L$, ¿es L' una cota superior de f?

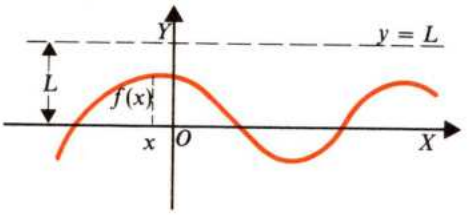
17. La función $f(x) = \dfrac{x^2+6}{x^2+8}$, ¿está acotada superiormente? Halla, en caso afirmativo, una cota superior.

18. La función $y = x^2 + 8x$, ¿está acotada inferiormente? Para ayudarte haz la representación gráfica.

19. ¿Está acotada la siguiente función?

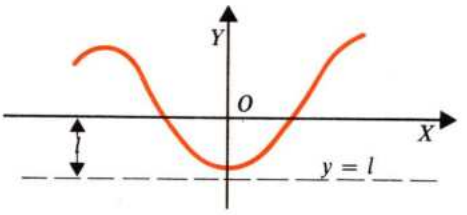
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x+5} & \text{si} \quad x > 0 \\ 4 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Gráficamente, el hecho de que una función esté acotada superiormente quiere decir que su gráfica está toda ella situada por debajo de la recta $y = L$, donde L es una cota superior de dicha función, como indica la figura 11.



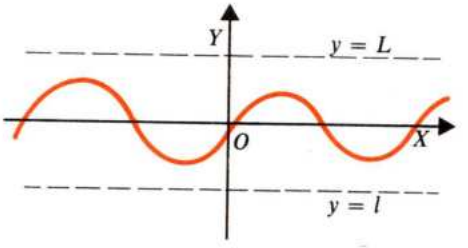
Función acotada superiormente
(Fig. 11)

Análogamente, decir que una función f está acotada inferiormente quiere decir que su gráfica está toda ella por encima de la recta $y = l$, como indica la figura 12.



Función acotada inferiormente
(Fig. 12)

Decir que f está acotada querrá entonces decir que su gráfica está comprendida entre las rectas $y = l$ e $y = L$, como se indica en la figura 13.



(Fig. 13)

Una función f se dice *acotada en valor absoluto* si existe un número real $L > 0$ tal que $\forall x \in \mathrm{Dom}\,(f)\ \ |f(x)| \leqslant L$.

6.3. Teorema:

Una función f está acotada en valor absoluto si y sólo si está acotada.

Demostración: Si f está acotada en valor absoluto,

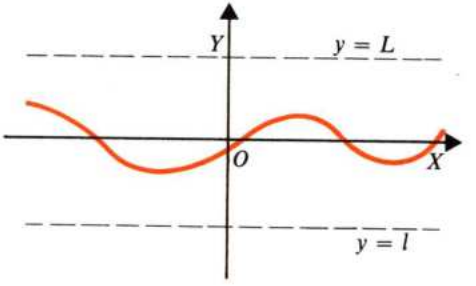
$$\forall x, |f(x)| \leqslant L \implies -L \leqslant f(x) \leqslant L$$

luego f está acotada inferiormente por $-L$, y superiormente por L, luego f está acotada.

Recíprocamente, si f está acotada

$$\forall x,\ l \leqslant f(x) \leqslant L$$

como se indica en la figura 14. Si $M = \text{máx}\,(|L|, |l|)$, entonces $-M \leqslant f(x) \leqslant M$, luego $|f(x)| \leqslant M$ y f está acotada en valor absoluto.



(Fig. 14)

7 Propiedades de las funciones acotadas

7.1. *La suma de dos funciones acotadas es otra función acotada.*

Sean f y g dos funciones acotadas

$$f \text{ acotada} \Longrightarrow \forall x,\ l \leqslant f(x) \leqslant L$$
$$g \text{ acotada} \Longrightarrow \forall x,\ l' \leqslant g(x) \leqslant L'$$

entonces

$$\forall x,\ l + l' \leqslant f(x) + g(x) \leqslant L + L' \Longrightarrow \forall x,$$

$l + l' \leqslant (f + g)(x) \leqslant L + L' \Longrightarrow f + g$ está acotada.

7.2. *El producto de dos funciones acotadas es otra función acotada.*

Si f y g están acotadas, entonces están acotadas en valor absoluto, luego

$$\forall x, |f(x)| \leqslant L \quad \text{y} \quad \forall x, |g(x)| \leqslant L',$$

entonces

$$\forall x,\ |(fg)(x)| = |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)|\ |g(x)| \leqslant L \cdot L'$$

luego fg está acotada en valor absoluto y por el teorema de **6.3.** fg está acotada.

7.3. *Si la función f está acotada, entonces la función $-f$ también está acotada.*

En efecto: si f está acotada, se verifica:

$\forall x \in \text{Dom}\,(f),\ |f(x)| \leqslant L$ y como $|-f(x)| = |f(x)|, \forall x$ se tiene que $-f$ es acotada.

7.4. Si f es una función acotada, $\forall c \in \mathbb{R}$, cf está también acotada.

Vamos a suponer que f es acotada, entonces $|f(x)| \leqslant L$, $\forall x \in \text{Dom}\,(f)$; como $|cf(x)| = |c|\ |f(x)| \leqslant |c| \cdot L$, resulta que cf está acotada.

Ejercicios y cuestiones

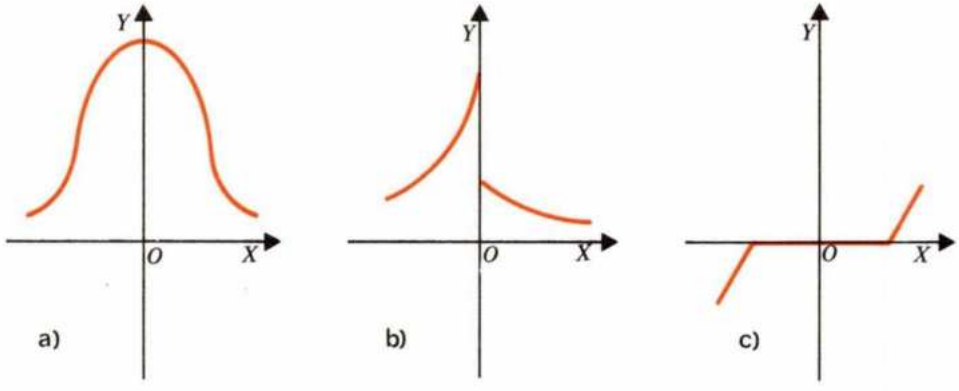
20. La función $f(x) = x$ (identidad), ¿es par?, ¿e impar?

21. ¿Es simétrica respecto al eje OY la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^6 - 3}$?

22. Demuestra que la suma de dos funciones pares es par.

23. ¿Es cierto que la suma de dos funciones impares es impar?

24. Observa las gráficas de la figura 15 y di si son simétricas respecto al eje OY o al origen.



(Fig. 15)

25. ¿Existe alguna función que sea creciente y decreciente a la vez?

26. La función $f(x) = x^2 - 6x$, ¿es creciente en el punto $x = 3$? Ayúdate de la representación gráfica de la parábola $y = x^2 - 6x$.

27. Pon un ejemplo de una función monótona creciente que no sea estrictamente creciente.

28. De las gráficas de la figura 15, encuentra las correspondientes a funciones crecientes en $x = 0$ y monótonas crecientes en $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

29. Demuestra que si f es una función acotada superiormente, entonces $-f$ está acotada inferiormente.

30. ¿Está acotada una función constante? ¿Y la identidad?

31. De las gráficas de la figura 15, encuentra las que corresponden a funciones acotadas superiormente.

32. Dibuja gráficas de funciones crecientes, decrecientes, estrictamente crecientes, decrecientes en el punto $x = 1$.

33. Idem de función acotada superiormente.

34. Idem de funciones acotadas en valor absoluto.

Tema 13 LIMITE DE FUNCIONES

Se inicia el tema haciendo un estudio informal de las ideas que llevan al concepto de límite. Se dan después dos definiciones equivalentes de límite y las propiedades de los límites.

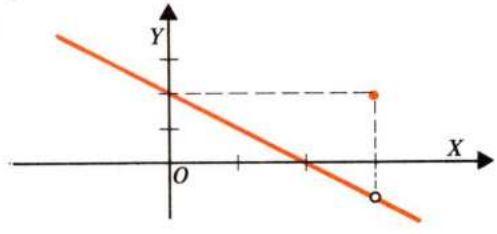
Finaliza el tema con los conceptos de límite por la izquierda y límite por la derecha, que en el tema siguiente nos ayudarán a precisar el concepto de continuidad.

1 Límite de una función: Ideas previas

1.1. Consideremos la función g definida en $\mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si} \quad x \neq 3 \\ 1 & \text{si} \quad x = 3 \end{cases}$$

cuya gráfica es la de la figura 1.



(Fig. 1)

Si x es un punto del eje OX distinto de 3, x es de la forma $3 + \delta$ con $\delta \neq 0$, en este punto

$$g(x) = g(3 + \delta) = -3 - \delta + 2 = -1 - \delta.$$

En la tabla de la figura 2 se observa que al hacerse δ muy próximo a cero (o lo que es lo mismo, que $x = 3 + \delta$ se aproxima a 3), el valor de la función se aproxima a -1.

δ	$g(x) = -1 - \delta$
1	0
0,8	−1,8
0,5	−0,5
0,1	−1,1
0,01	−1,01
0,001	−1,001

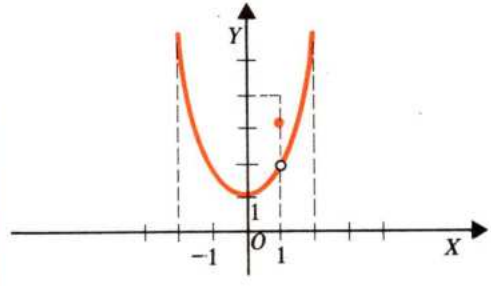
(Fig. 2)

Esta situación se expresa diciendo que *el límite de la función g cuando x tiende a 3 es* -1, y se escribe: $\lim_{x \to 3} g(x) = -1$.

1.2. Consideremos ahora la función definida en $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 3 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

cuya gráfica es la de la figura 3; se trata de estudiar el comportamiento de f en las proximidades del punto $x = 1$.



(Fig. 3)

Si x es un punto del eje OX distinto de 1, x es de la forma $1 + \delta$ con $\delta \neq 0$, en dicho punto $f(x) = (1 + \delta)^2 + 1 = \delta^2 + 2\delta + 2$.

En la tabla de la figura 4 se observa que al hacerse δ muy próximo a cero (lo que quiere decir que $x = 1 + \delta$ se aproxima a 1), el valor de la función se aproxima a 2 y, como en el caso anterior, esta situación se expresa diciendo que *el límite de la función f cuando x tiende a* 1 *es* 2, es decir: $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

δ	$\delta^2 + 2\delta + 2 = (\delta + 1)^2 + 1$
1	5
−1	1
0,9	4,61
−0,7	1,09
0,5	3,25
0,1	2,21
0,01	2,0201
0,001	2,002001

(Fig. 4)

1.3. Otro ejemplo, ligeramente distinto, es el siguiente: sea h la función definida por $h(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ en $\mathbb{R} - \{2\}$. Vamos a estudiar su comportamiento en las proximidades del punto $x = 2$; en este caso el punto $x = 2$ no pertenece al dominio de definición de h, pero procediendo de la misma manera que en los ejemplos anteriores, se tiene que si $x = 2 + \delta$, con $\delta \neq 0$

$$h(x) = \frac{(2 + \delta)^2 - 4}{2 + \delta - 2} = \frac{\delta^2 + 4\delta}{\delta} = \delta + 4$$

La tabla de la figura 5 nos muestra $\lim_{x \to 2} h(x) = 4$, pues si δ se aproxima a 0, el valor de la función se aproxima a 4.

δ	$\delta + 4$
1	5
0,6	4,6
0,08	4,08
0,01	4,01
0,001	4,001
0,0001	4,0001
.....	.....

(Fig. 5)

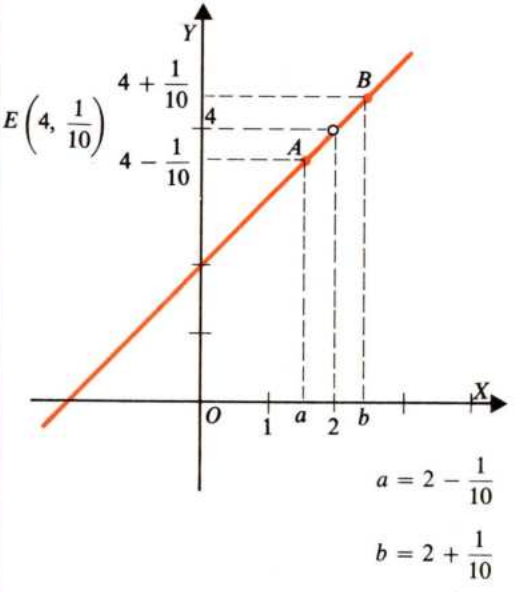
1.4. Vamos a considerar de nuevo la función

$$h(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \text{del punto } \mathbf{1.3.}$$

¿Para qué valores de x se verifica que $h(x)$ pertenece a un entorno del punto 4 y de radio $\dfrac{1}{10}$? Es decir, ¿para qué valores de x se verifica que $h(x) \in E\left(4, \dfrac{1}{10}\right)$?

En la figura 6 se ha representado el entorno $E\left(4, \dfrac{1}{10}\right)$ sobre el eje OY; las líneas de puntos trazadas por los extremos de dicho entorno, paralelas al eje OX, determinan en la gráfica de h dos puntos, A y B; trazando por ellos paralelas al eje OY, queda determinado sobre el eje OX un intervalo de extremos a y b; pues bien, todos los puntos $x \in]a, b[$, excepto el punto $x = 2$, verifican que $h(x) \in E\left(4, \dfrac{1}{10}\right)$.

Obsérvese en la figura que el intervalo abierto $]a, b[$ es un entorno del punto $x = 2$.



(Fig. 6)

La respuesta a la pregunta planteada al principio es que:

$$\forall x \in]a, b[,\ x \neq 2, \text{ se verifica: } h(x) \in E\left(4, \frac{1}{10}\right)$$

Veamos ahora cómo se pueden calcular los extremos a y b de dicho entorno.

Para ello consideremos la función $h_1(x) = x + 2$.

Las funciones $h(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ y $h_1(x) = x + 2$ producen la misma imagen para todos los x distintos de 2; es decir:

$$h(x) = h_1(x),\ \forall x \neq 2$$

Como a y b (Fig. 6) son distintos de 2, resulta:

$$h(a) = h_1(a) = a + 2 = 4 - \frac{1}{10} \Longrightarrow a = 2 - \frac{1}{10} = \frac{19}{10} = 1{,}9$$

$$h(b) = h_1(b) = b + 2 = 4 + \frac{1}{10} \Longrightarrow b = 2 + \frac{1}{10} = \frac{21}{10} = 2{,}1$$

El intervalo abierto $\left]2 - \dfrac{1}{10}, 2 + \dfrac{1}{10}\right[$ es un entorno del punto 2; todos los puntos de dicho entorno (excepto $x = 2$) tienen su imagen en $E\left(4, \dfrac{1}{10}\right)$, como ya vimos.

En general, si tomamos en la gráfica de h un entorno $E(4, \varepsilon)$ de 4 de radio ε, se puede encontrar un entorno $E(2, \delta)$ de 2 de radio δ tal que $\forall x \in E(2, \delta)$, $x \neq 2$, se verifica $f(x) \in E(4, \delta)$ o, lo que es lo mismo, $f(E(2, \delta) - \{2\}) \subset E(4, \varepsilon)$.

2 Límite de una función en un punto: Definiciones

En los ejemplos anteriores se ha visto que decir $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 4$ significa que $f(x)$ se aproxima a L siempre que x se aproxima suficientemente a a; también se ha comprobado en el apartado **1.4.** que fijado un entorno E de L de radio ε, se puede encontrar un entorno E_1 de a de radio δ tal que si $x \in E_1$, $x \neq a$, se verifica $f(x) \in E$.

Estas consideraciones conducen a la siguiente definición:

2.1. Definición:

Se dice que la función f tiene por límite el número real L cuando x tiende a a si para todo entorno $E(L, \varepsilon)$ de L de radio ε se puede encontrar un entorno $E_1(a, \delta)$ de a de radio δ tal que si $x \in E_1(a, \delta)$, $x \neq a$, se verifica: $f(x) \in E(L, \varepsilon)$, y se escribe: $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Nota: Obsérvese que en la definición de límite se prescinde del valor de la función en el punto $x = a$.

Ejemplo:

- Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ y probemos que $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

La función f está definida en todo $\mathbb{R}$ excepto en el punto $x = 1$. Llamemos f_1 a la función $f_1(x) = x + 1$ que está definida en todo $\mathbb{R}$.

Las funciones f y f_1 producen la misma imagen, excepto para el punto $x = 1$, en el cual f no está definida, es decir:

$$f(x) = f_1(x) \quad \forall x \neq 1$$

Como en la definición de límite no se tiene en cuenta el valor de la función para $x = a = 1$, resulta que $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} f_1(x)$.

Fijemos un entorno del punto 2 de radio $\varepsilon > 0$, $E(2, \varepsilon)$.

Para encontrar el entorno correspondiente del punto $x = 1$ vamos a proceder como en el apartado **1.4.** (Fig. 7.)

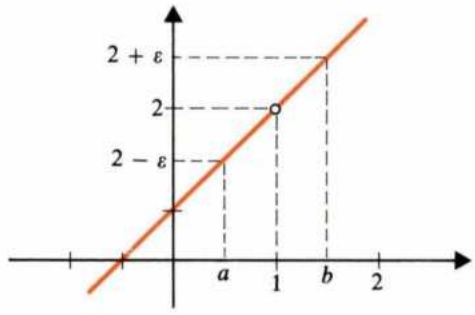
$$f(a) = f_1(a) = a + 1 = 2 - \varepsilon \implies a = 1 - \varepsilon$$

$$f(b) = f_1(b) = b + 1 = 2 + \varepsilon \implies b = 1 + \varepsilon$$

Todos los puntos del entorno $E_1 =]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ del punto 1, excepto el punto 1, tienen su imagen en $E(2, \varepsilon)$, luego

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

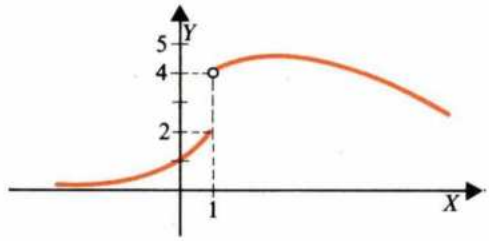
En este ejemplo es $\delta = \varepsilon$.



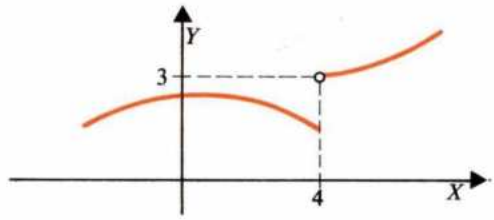
(Fig. 7)

Ejercicios:

1. Dada la función f cuya gráfica es la siguiente figura, ¿es $\lim_{x \to 1} f(x) = 4$?



2. Dada la función f cuya gráfica es la de la siguiente figura, ¿es $\lim_{x \to 4} f(x) = 3$?



3. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$, prueba que $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$. Dado el entorno $E(6, 10^{-3})$ calcula el entorno correspondiente del punto $x = 3$.

4. Comprueba que si f es la función dada por $f(x) = 3x - 2$, entonces $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$.

5. ¿Cuál es el límite de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ cuando x tiende a 1?

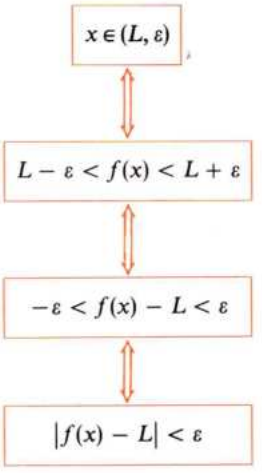
2.2. La definición dada en **2.1.** se puede expresar también del modo siguiente:

Se dice que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ *cuando para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que si* $x \in E_1(a, \delta)$ *y* $x \neq a$, *se verifica:* $f(x) \in E(L, \varepsilon)$.

Ahora bien, decir que $f(x) \in E(L, \varepsilon)$ significa que

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \quad \text{o también} \quad -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon,$$

y recordando las propiedades del valor absoluto, las desigualdades anteriores son equivalentes a $|f(x) - L| < \varepsilon$, como se indica en el esquema del margen.



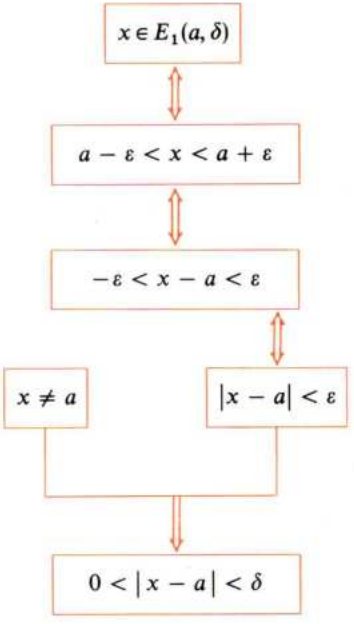
Del mismo modo, si $x \in E_1(a, \delta)$, se verifica $a - \delta < x < a + \delta$ o, lo que es lo mismo, $-\delta < x - a < \delta$, y estas desigualdades son equivalentes a $|x - a| < \delta$.

Como además $x \neq 0$, las condiciones $\begin{cases} |x - a| < \delta \\ x \neq 0 \end{cases}$ se pueden expresar conjuntamente escribiendo $0 < |x - a| < \delta$.

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede dar la siguiente definición de límite, equivalente a la dada en **2.1.**

Se dice que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ *si para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



Ejemplos:

- Sea f la función constante de valor c, es decir, $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = c$; entonces $\lim_{x \to a} f(x) = c$. En efecto, si nos dan $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$ se tiene que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces
$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

- Sea $1_{\mathbb{R}}$ la función identidad, es decir, $1_{\mathbb{R}}(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{x \to a} 1_{\mathbb{R}}(x) = a$, ya que dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$, se tiene que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces
$$|1_{\mathbb{R}}(x) - 1_{\mathbb{R}}(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon$$

6. Prueba que $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ si $f(x) = 3x - 1$.

7. Prueba que $\lim_{x \to 2} (6x - 5) = 7$.

3 Propiedades de los límites

3.1. *Si* $P_1(x)$ *y* $P_2(x)$ *son dos funciones polinómicas tales que*

$$P_1(x) = (x - a)P'_1(x) \quad \text{y} \quad P_2(x) = (x - a)P'_2(x)$$

entonces si $\lim_{x \to a} \dfrac{P'_1(x)}{P'_2(x)} = L$ *se tiene que* $\lim_{x \to a} \dfrac{P_1(x)}{P_2(x)} = L$. Ya se ha justificado esta propiedad en el apartado **1.4.**

En general, se tiene:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{(x - a)P'_1(x)}{(x - a)P'_2(x)} \overset{①}{=} \frac{P'_1(x)}{P'_2(x)} \quad \forall x \neq a$$

La igualdad ① es cierta para todo $x \neq a$, y como en la definición de límite cuando x tiende a a no se tiene en cuenta el valor de la función, para $x = a$ resulta que:

$$\lim_{x \to a} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \lim_{x \to a} \frac{P'_1(x)}{P'_2(x)}$$

3.2. Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces $\lim_{x \to a} (f(x) - L) = 0$.

En efecto, por ser $\lim_{x \to a} f(x) = L$, fijado un $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$, o, lo que es lo mismo,

$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |(f(x) - L) - 0| < \varepsilon$; esta última implicación nos dice que $\lim_{x \to a} (f(x) - L) = 0$.

3.3. *El límite de la función constante* $f(x) = c$ *es* c, *es decir,* $\lim_{x \to a} f(x) = c$.

El límite de la función identidad cuando x *tiende a* a *es* a, *es decir,* $\lim_{x \to a} 1_{\mathbb{R}}(x) = a$.

Las demostraciones de estas propiedades pueden verse en los ejemplos del apartado **2.2.** de este tema.

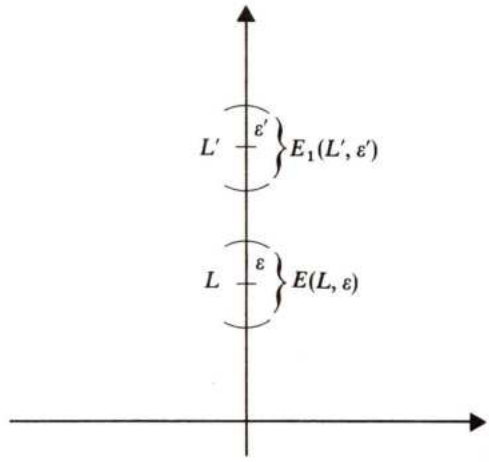
3.4. *El límite de una función f, si existe, es único.*

En efecto: supongamos que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} f(x) = L'$, con $L \neq L'$.

Por ser $\lim_{x \to a} f(x) = L$, fijado un entorno $E(L, \varepsilon)$ de L se puede encontrar un entorno del punto a, $E'(a, \delta)$, tal que si $x \in E'(a, \delta)$ y $x \neq a$ se verifica $f(x) \in E(L, \varepsilon)$.

Análogamente, por ser $\lim_{x \to a} f(x) = L'$, fijado un entorno $E_1(L', \varepsilon')$ de L' se puede encontrar un entorno del punto a, $E'_1(a, \delta')$, tal que si $x \in E'_1(a, \delta')$ y $x \neq a$ se verifica $f(x) \in E_1(L', \varepsilon')$. Eligiendo ε y ε' de modo que los entornos $E(L, \varepsilon)$ y $E_1(L', \varepsilon')$ sean disjuntos (Fig. 8), no se podrán verificar simultáneamente las condiciones

$$\begin{cases} f(x) \in E(L, \varepsilon) \\ f(x) \in E_1(L', \varepsilon') \end{cases}$$ luego el límite de f debe ser único.



(Fig. 8)

3.5. *Si* $\lim_{x \to a} f(x) = L$, *f está acotada en un cierto entorno de a.*

En la definición de $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se afirma que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Tomando $\varepsilon = 1$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < 1 \Longrightarrow$$

$$-1 < f(x) - L < 1 \Longrightarrow L - 1 < f(x) < L + 1$$

y estas desigualdades nos dicen que f está acotada en el entorno $(a - \delta, a + \delta)$.

Si f está definida en $x = a$, una cota superior será el mayor de los números $\{L + 1, f(a)\}$, y una cota inferior será el menor de los números $\{L - 1, f(a)\}$.

Si f no está definida en $x = a$, una cota superior es $L + 1$, y una cota inferior es $L - 1$.

3.6. También se verifica la siguiente propiedad, que no demostraremos:

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L > 0$, *entonces existe un entorno de a en el que la función toma valores positivos, excepto quizá en el propio punto a.*

4 Límites y operaciones con funciones

4.1. Se verifican las siguientes propiedades:

a) *Sean f y g dos funciones tales que* $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, *entonces* $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L_1 + L_2 = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$.

b) *Sean f, g funciones tales que* $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$; *entonces* $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = L_1 - L_2$.

c) *Si* $c \in \mathbb{R}$ *y f es una función tal que* $\lim_{x\to a} f(x) = L$, *entonces* $\lim_{x\to a}(cf(x)) = c \cdot L$.

d) *Si f y g son dos funciones tales que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \quad y \quad \lim_{x\to a} g(x) = L_2, \quad \text{entonces}$$
$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = L_1 \cdot L_2$$

e) *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, *y* $L_2 \neq 0$, *entonces la función g no se anula en un entorno de a, y se tiene:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

4.2. Demostremos la propiedad a).

Como $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Análogamente, como $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \implies |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

tomando $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, se tiene:

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| =$$
$$= |(f(x) - L_1) + (g(x) - L_2)| \leqslant |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ luego } \lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$$

4.3. Sea la función $f(x) = x^2$; $f = 1_{\mathbb{R}} \cdot 1_{\mathbb{R}}$, ya que

$$1_{\mathbb{R}}(x) \cdot 1_{\mathbb{R}}(x) = x \cdot x = x^2 = f(x)$$

Aplicando la propiedad d) de **4.1.**, se tiene:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x^2 = \lim_{x \to a} 1_{\mathbb{R}}(x) \cdot \lim_{x \to a} 1_{\mathbb{R}}(x) = a \cdot a = a^2$$

Análogamente:

$$\lim_{x \to a} x^3 = \lim_{x \to a}(x^2 \cdot x) = \lim_{x \to a} x^2 \cdot \lim_{x \to a} x = a^2 \cdot a = a^3$$

En general: $\lim_{x \to a} x^n = a^n$.

4.4. Sea $c \in \mathbb{R}$; entonces

$$\lim_{x \to a} c \cdot x^n \overset{①}{=} c \lim_{x \to a} x^n = c \cdot a^n,$$

donde en ① se ha utilizado la propiedad c) de **4.1.**

4.5. Como consecuencia de las propiedades estudiadas en los apartados **3.3.**, **4.1.** y **4.4.** se tiene que si

$f(x) = c_0 + c_1 + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$ es una función polinómica,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a}(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n) =$$
$$= c_0 + c_1a + \cdots + c_na^n$$

Ejemplos:

- $\lim_{x \to 2}(3x + 5x^2 - 8x^3) = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2^3 = -38$

- $\lim_{x \to 1}(4 - 3x^5 + 6x^8) = 4 - 3 \cdot 1^5 + 6 \cdot 1^8 = 7$

- $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}{x^2 - 6x + 9} = \lim_{x \to 3} \dfrac{(x-3)^3}{(x-3)^2} \overset{①}{=} \lim_{x \to 3}(x - 3) = 0,$

  donde en ① se ha utilizado la propiedad estudiada en **3.1.**

- $\lim_{x \to 1} \dfrac{2x + 3}{x + 6} = \dfrac{\lim_{x \to 1}(2x + 3)}{\lim_{x \to 1}(x + 6)} = \dfrac{2 + 3}{1 + 6} = \dfrac{5}{7}$

8. Calcula $\lim_{x \to 2}(3x^2 - 5x + 6)$.

9. Demuestra que $\lim_{x \to 1} \dfrac{x + 1}{2x} = \dfrac{1}{2}$

10. Halla $\lim_{x \to 1} \dfrac{2x - 5}{x + 7}$.

11. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{(x-1)^2}{x + 2}$

b) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 2x}{6x + 5}$

c) $\lim_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 8x + 16}{x - 4}$

d) $\lim_{x \to 1} \dfrac{6x}{7x^2 + 6x^5}$

12. Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, halla $\lim_{x \to a} f^2(x)$.

13. ¿Es cierto que si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, es $L > f(a)$? En caso negativo, pon un ejemplo.

14. Calcula:

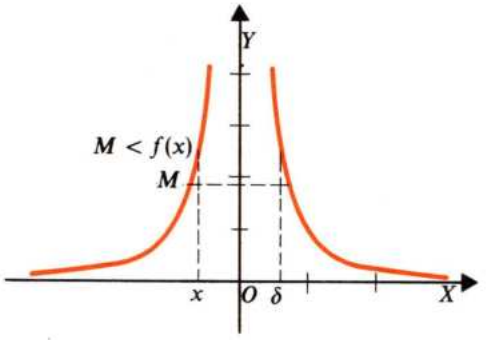
$$\lim_{x \to 9} \frac{(x-9)^3(x+2)}{(x-9)^2(x+3)}$$

¿En qué propiedad te basas para ello?

5 Límites infinitos

5.1. Sea f una función; se dice que el *límite de f en* $x = a$ *es más infinito, y se escribe* $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, *si* $\forall M > 0, \exists \delta > 0$ *tal* que $0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > M$.

Intuitivamente esto significa que, dado cualquier número real positivo, podemos encontrar un entorno de a en el que los valores de la función son mayores que M.



(Fig. 9)

Ejemplos:

- Sea $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Su gráfica está representada en la figura 9.

  En dicha gráfica se ve que, fijada una ordenada M, podemos encontrar un entorno del origen de radio δ para el que los valores de f en dicho entorno son mayores que M, luego

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

- Consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$. Si estudiamos su comportamiento en las proximidades de $x = 1$ mediante la tabla de la figura 10, se ve que cuando x toma valores muy próximo a 1, el valor de la función se hace arbitrariamente grande, luego

$$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$$

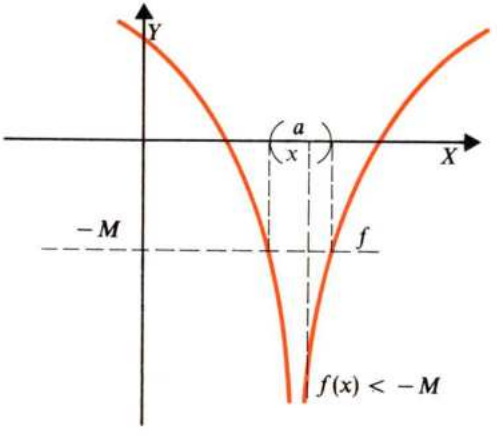
x	$f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$
0	1
0,5	4
0,9	100
0,99	10.000
0,999	100.000
....	.....

(Fig. 10)

5.2. Análogamente, se dice que *el límite de f en* $x = a$ *es menos infinito, y se escribe* $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, *si* $\forall M > 0, \exists \delta > 0$ *tal que*

$$0 < |x - a| < \delta \implies f(x) < -M.$$

Gráficamente, esto significa que, en un entorno conveniente de a, los valores de la función toman valores tan pequeños como se quiera, como se indica en la figura 11.



(Fig. 11)

Ejemplos:

- Consideremos la función $y = \dfrac{-1}{x^4}$. La tabla de la figura 12, correspondiente a dicha función, nos permite ver que para valores muy próximos a 0, los valores de y se hacen arbitrariamente pequeños; podemos entonces escribir $\lim_{x \to 0} y = -\infty$.

x	$y = \dfrac{-1}{x^4}$
1	−1
0,5	−16
0,1	−10.000
0,01	−100.000000

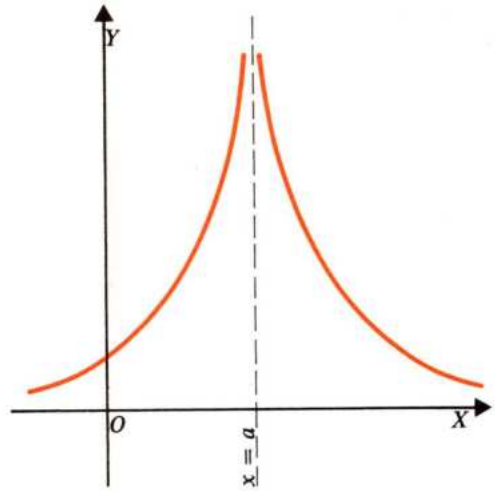
(Fig. 12)

- Sea la función $f(x) = \dfrac{-1}{(x-3)^2}$.

  Veamos que $\lim_{x \to 3} f(x) = -\infty$

  En efecto: sea $M > 0$; tenemos que buscar un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-3| < \delta$, entonces $f(x) < -M$;

  como $f(x) = \dfrac{-1}{(x-3)^2} < -M$, se deberá tener $M < \dfrac{1}{(x-3)^2}$, es decir: $(x-3)^2 < \dfrac{1}{M}$, luego $|x-3| < \dfrac{1}{\sqrt{M}}$, de donde tomando $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}}$ se ve que si $0 < |x-3| < \delta$, entonces $f(x) < -M$, como queríamos demostrar.

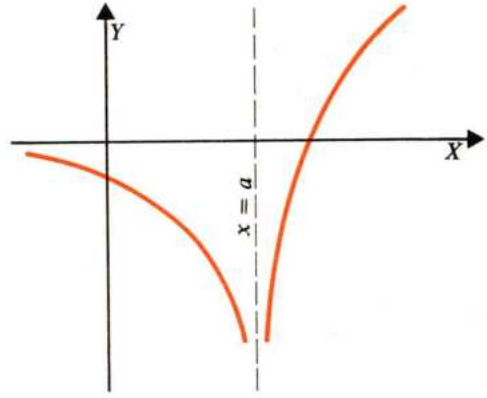


$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

(Fig. 13)

5.3. Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, se dice que la función f posee en $x = a$ una *asíntota vertical de ramas convergentes.*

Como se ve en las figuras 13 y 14 esto significa que la gráfica de la función se aproxima tanto como se quiera a la recta $x = a$ cuando la variable independiente x se aproxima a a. La recta $x = a$ se dice que es una *asíntota vertical de f.*



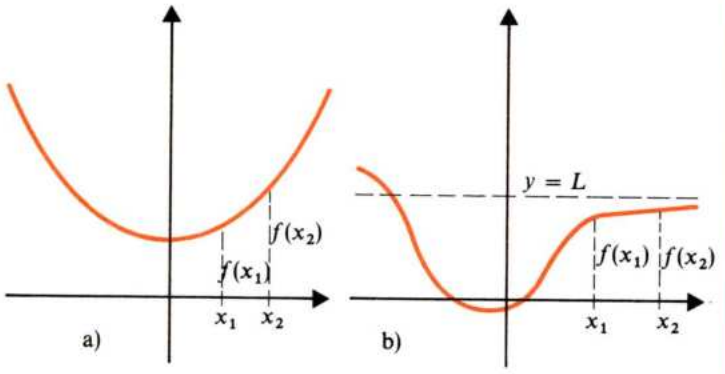
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

La recta x = a es asíntota vertical en estas gráficas

(Fig. 14)

6 Límites en el infinito. Asíntotas horizontales

6.1. Consideremos las dos gráficas de la figura 15; estas dos gráficas se comportan de una manera distinta conforme nos alejamos del origen tomando valores positivos.



(Fig. 15)

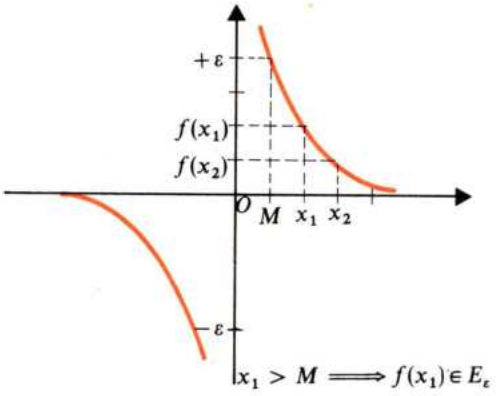
En la gráfica a), los valores de la función aumentan conforme nos alejamos del origen tomando valores positivos, haciéndose tan grandes como queramos; pero en la b) los valores de la función se aproximan arbitrariamente a la recta $y = L$.

¿Cómo se comporta una función cuando nos alejamos del origen tomando valores positivos o negativos?

Veamos el siguiente ejemplo: sea la función $f(x) = \frac{1}{x}$ cuya gráfica es la de la figura 16 y cuya tabla de valores está indicada en la figura 17; se ve que a medida que los valores de x aumentan, los de $f(x)$ se hacen arbitrariamente pequeños; esto lo expresaremos escribiendo $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, y diremos que el límite de $\frac{1}{x}$ cuando x tiende a infinito es 0.

¿Cómo podemos expresar esto? En la figura 16 vemos que si damos un entorno arbitrario E del punto cero de radio ε, podemos encontrar un M tal que si $x > M$, $f(x) \in E$; esto nos lleva a dar la siguiente definición:

Se dice que el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a más infinito es L, y se escribe $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, *si* $\forall \varepsilon > 0$ *existe un* M *tal que* $x > M \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.



(Fig. 16)

x	$f(x)$
1	1
2	0,5
10	0,1
100	0,01
1.000	0,001
....	....

(Fig. 17)

Ejemplo:

- La función $f(x) = \dfrac{x}{2x+3}$ es tal que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{2};$$

En efecto: dado $\varepsilon > 0$, tenemos que buscar un M tal que $x > M$ implique $\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$,

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x}{2x+3} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{-3}{2(2x+3)}\right| = \frac{3}{2|2x+3|}$$

Si $\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$, entonces:

$$\frac{3}{2|2x+3|} < \varepsilon \Longrightarrow \frac{1}{|2x+3|} < \frac{2\varepsilon}{3} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{3}{2\varepsilon} < 2x+3 \Longrightarrow \frac{3-6\varepsilon}{4\varepsilon} < x$$

Tomamos $M = \dfrac{3-6\varepsilon}{4\varepsilon}$, entonces, si $x > M$, $\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$; de aquí que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{2x+3} = \dfrac{1}{2}$.

Si $\varepsilon = 0{,}01$, entonces $M = \dfrac{3 - 6\cdot 0{,}01}{4\cdot 0{,}01} = 73{,}5$; tomemos $x = 80 > M$, entonces

$$\left|f(80) - \frac{1}{2}\right| = 0{,}009 < 0{,}01 = \varepsilon.$$

6.2. Análogamente, *se dice que el límite de una función* $f(x)$ *cuando* x *tiende a menos infinito es* L, *y se escribe* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$, *si* $\forall\varepsilon > 0$, $\exists M$ *tal que* $x < M \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Ejemplo:

- Sea la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$. En la tabla de la figura 18 se ve que haciendo los valores de x suficientemente pequeños, los valores de $f(x)$ se aproximan a 1 tanto como queramos; entonces:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1.$$

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$, la recta $y = L$ se dice que es una *asíntota horizontal de* f.

15. Demuestra que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{3x-1} = \dfrac{2}{3}$.

Dado $\varepsilon = 0{,}001$, halla el correspondiente M.

16. Dada la tabla de una función $f(x)$,

x	$f(x)$
1	$\frac{2}{3}$
10	4
100	30
1.000	400
10.000	7.000

¿se puede decir que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 30$?

17. Comprueba mediante una tabla de valores que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{6x-1} = \dfrac{1}{2}$.

Si $\varepsilon = 0{,}1$, halla un M conveniente.

x	$f(x) = \dfrac{x-1}{x}$
-1	2
-10	1,1
-100	1,01
-1.000	1,001

(Fig. 18)

6.3. Teorema:

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = L_2$, entonces

a) $\lim_{x\to\infty} \big(f(x) \pm g(x)\big) = L_1 \pm L_2$

b) $\lim_{x\to\infty} \big(f(x)\, g(x)\big) = L_1 \cdot L_2$

c) Si $L_2 \neq 0$, entonces $g(x)$ es distinto de cero para x suficientemente grande, y se tiene: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$.

d) Si $c \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to\infty} (cf)(x) = c \cdot L_1$.

Demostremos la propiedad a).

Sea $\varepsilon > 0$; como $\lim_{x\to\infty} f(x) = L_1$, existe un M_1 tal que

$$x > M_1 \Longrightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Análogamente existe un M_2 tal que

$$x > M_2 \Longrightarrow |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomando M el mayor de M_1 y M_2, si $x > M$, se tiene:

$$|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| = |(f(x) - L_1) + (g(x) - L_2)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Análogamente, se tienen las mismas propiedades para los límites cuando x tiende a menos infinito.

Se ha visto que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; también se verifica que $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, entonces:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right) = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right) \cdot \left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right) = 0 \cdot 0 = 0;$$

análogamente, $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ y $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

6.4. Teorema:

El límite de un cociente de dos funciones polinómicas del mismo grado cuando x tiende a infinito o a menos infinito es el cociente de los coeficientes de más alto grado.

Demostración:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0} \overset{①}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a_n + a_{n-1}\dfrac{1}{x} + \cdots + a_0\dfrac{1}{x^n}}{b_n + b_{n-1}\dfrac{1}{x} + \cdots + b_0\dfrac{1}{x^n}} \overset{②}{=}$$

$$= \frac{a_n + a_{n-1}\cdot \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} + \cdots + a_0 \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n}}{b_n + b_{n-1}\cdot \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} + \cdots + b_0 \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n}} \overset{③}{=} \frac{a_n}{b_n}$$

Donde en ① se ha dividido numerador y denominador por la más alta potencia de x, en ② se han utilizado las propiedades estudiadas en **6.3.** a) y **6.3.** c), y en ③ que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.

La demostración para $x \to -\infty$ es análoga.

Ejemplos:

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 + 4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{1 + \dfrac{4}{x^2}} = \dfrac{3}{1} = 3$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^3 - 5x^4}{x^4 + 1} = \dfrac{-5}{1} = -5$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^6 + 3x^2}{6x^6 + 7} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

18. Calcula $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^4 - 2x^3 + 1}{2x^4 - x^2 + 3}$

19. Idem $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^5 + 4x}{3 + 4x^5 - 10x^2}$

6.5. Teorema:

El límite del cociente de dos funciones polinómicas tales que el grado del numerador es menor que el del denominador cuando x tiende a infinito o a menos infinito es cero.

La demostración es análoga a la del teorema anterior.

Ejemplos:

- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x-1}{x^2+7} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1+\frac{7}{x}} = \dfrac{0}{1} = 0$

- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{6x^3+7x^5}{2x^{10}-8} = 0$

20. Halla $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^6-5}{2x^6+4x}$

21. Idem $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+4}{6x^5+1}$

22. Idem $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3}{2x+6}$

7 Ramas parabólicas

7.1. *Se dice que el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a infinito es infinito, y se* escribe $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, *si*

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists h \in \mathbb{R} \quad tal\ que \quad x > h \Longrightarrow f(x) > M$$

Geométricamente esto significa que, en la gráfica de la función f, las ordenadas se hacen tan grandes como queramos tomando valores de la abscisa suficientemente grandes (Fig. 19).

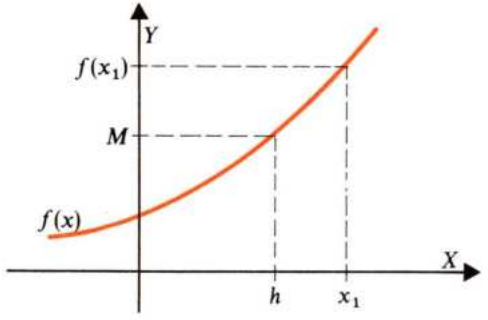
Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$, se dice que f tiene una *rama parabólica en la dirección del eje Y.*

Ejemplos:

- Sea $f(x) = x + 1$; vamos a ver que $\lim_{x\to\infty} (x+1) = \infty$. En efecto: dado M, tenemos que buscar un h tal que si $x > h$, $x + 1 > M$. entonces $x > M - 1$, luego tomando $h = M - 1$ se tiene que si $x > h = M - 1 \Longrightarrow x + 1 > M \Longrightarrow f(x) > M$.

- Sea $f(x) = x^2$; en la tabla de la figura 20 se ve intuitivamente que tomando x suficientemente grande, los valores de $f(x)$ se hacen todos tan grandes como se desee, luego $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$, y el cociente $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2}{x}$ tiende a infinito, luego tiene una rama parabólica en la dirección del eje Y.

El estudio del límite de un cociente de funciones polinómicas iniciado en el teorema **6.5.** se completa con los teoremas **7.2.** y **7.4.**, que no demostraremos.



(Fig. 19)

$x_1 > h \Longrightarrow f(x_1) > M$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

x	$f(x) = x^2$
0	0
1	1
2	4
10	100
100	10.000
1.000	1.000.000

(Fig. 20)

7.2. Teorema:

El límite cuando x tiende a infinito de un cociente de funciones polinómicas tales que el grado del numerador es mayor que el del denominador y tal que el coeficiente de más alto grado del numerador es positivo es infinito.

Ejemplo:

- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^5 - 2x^4 + 6}{2x^3 - 8} = \infty$, pues el grado del numerador es mayor que el del denominador y el coeficiente de mayor grado del numerador 3 es positivo.

7.3. *Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a infinito es menos infinito, y se escribe:* $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, *si* $\forall M \in \mathbb{R}, \exists h \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$x > h \Longrightarrow f(x) < M \qquad \text{(Fig. 21)}$$

Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a menos infinito es infinito si $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists h \in \mathbb{R}$ *tal que* $x < h \Longrightarrow f(x) > M$ *y se escribe:* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ (Fig. 22)

Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a menos infinito es menos infinito si $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists h \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$x < h \Longrightarrow f(x) < M$$

y se escribe: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (Fig. 23)

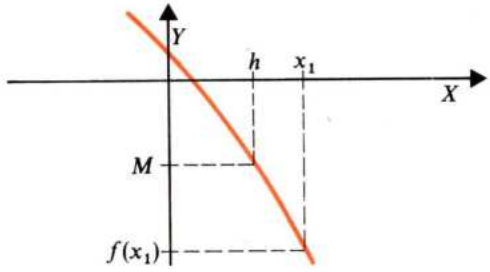
Las gráficas de las figuras 21, 22 y 23 ilustran estas definiciones.

Ejemplos:

- Sea $f(x) = x + 4$, entonces $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
  En efecto: dado M, sea $h = M - 4$, entonces, si
  $x < h \Longrightarrow x < M - 4 \Longrightarrow x + 4 < M \Longrightarrow f(x) < M$.

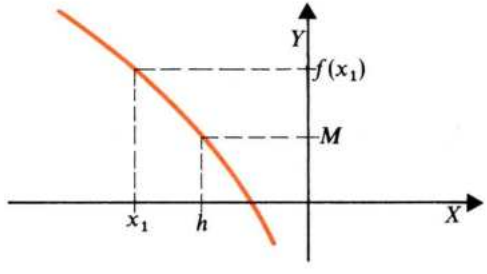
- Sea $f(x) = -2x + 8$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.
  En efecto: sea M, tomando $h = \dfrac{8 - M}{2}$ se tiene que

$$x > h \Longrightarrow x > \frac{8 - M}{2} \Longrightarrow 2x > 8 - M \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 2x - 8 > -M \Longrightarrow M < -2x + 8 = f(x)$$



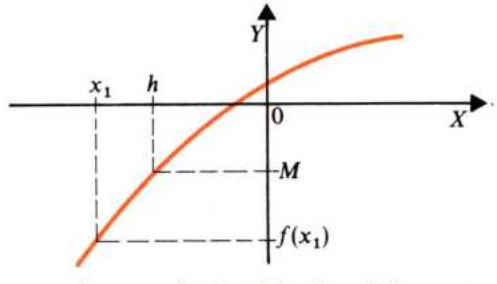
$x_1 > h \Longrightarrow f(x_1) < M$; $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

(Fig. 21)



$x_1 < h \Longrightarrow f(x_1) > M$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

(Fig. 22)



$x_1 < h \Longrightarrow f(x_1) < M$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

(Fig. 23)

23. Halla $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^6 - 2}{6x^4 - 1}$

24. ¿Es $\lim_{x\to\infty} (x^4 - 1) = \infty$?

Razona tu respuesta con una tabla de valores de función.

7.4. Teorema:

Sean $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$
y $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0$

dos funciones polinómicas, y grado de $g(x)$ *<* *grado de* $f(x)$, *entonces:*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad a_n > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad a_n < 0 \end{cases}$$

y

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad a_n > 0 \\ \infty & \text{si} \quad a_n < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

- $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{-3x^5 + 2x^2}{6x + 1} = \infty$, pues $x \longrightarrow -\infty$ y $a_n < 0$

- $\lim_{x \to \infty} \dfrac{-3x^4 + 2}{x + 6} = -\infty$, pues $x \longrightarrow \infty$ y $a_n < 0$

25. Halla:

a) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2x^5 + 4}{3x + 6}$

b) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{6x^5 + 2x - 1}{x^2 + 4x - 3}$

c) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{-3x^2 + 1}{6x + 6}$

d) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{-3x^5 + 4x^2 - 6x + 1}{x^3 + 3x^2 - 6x}$

26. Comprueba que $\lim_{x \to -\infty} x^2 = \infty$ y, dado $M = 1.000$, halla el correspondiente h.

27. Comprueba que $\lim_{x \to -\infty} (-2x + 8) = \infty$.

28. Comprueba que $\lim_{x \to -\infty} (-3x) = \infty$.

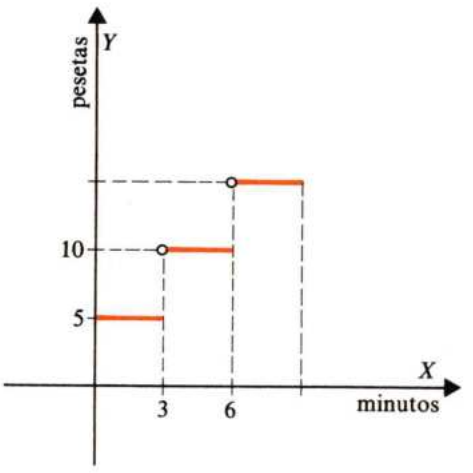
8 Límites laterales

8.1. Consideremos la función T que asocia a cada período de tiempo de duración de una llamada telefónica su importe; si suponemos que cada tres minutos o fracción importa 5 ptas., la gráfica de T es la de la figura 24.

¿Cómo se comporta T en el punto $x = 3$?

Si nos aproximamos a 3 tomando valores estrictamente mayores que 3, los valores de la función son 10; pero si nos aproximamos a 3 con valores estrictamente menores que 3, los valores de la función son 5.

Resumiremos esta situación diciendo que el límite de T por la derecha en el punto 3 es 10 y que el límite de T por la izquierda en el punto 3 es 5.



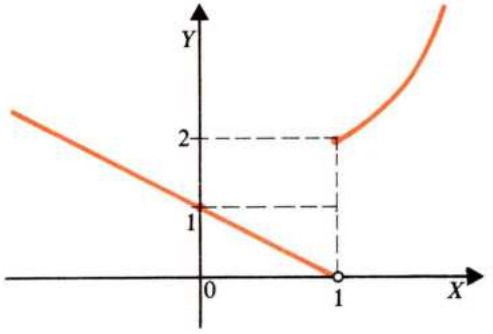
(Fig. 24)

Otro ejemplo: consideremos la función $f(x)$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si} \quad x \geqslant 1 \\ 1 - x & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

cuya gráfica es la de la figura 25. Si observamos la tabla de la función f que se indica en la figura 26, se ve que si x se aproxima a 1 con valores estrictamente menores que 1, $f(x)$ se aproxima a 0; mientras que si x se aproxima a 1 con valores estrictamente mayores, $f(x)$ se aproxima a 2.

Esto nos conduce a la siguiente definición:



(Fig. 25)

8.2. Definición:

Se dice que *el límite por la derecha de la función* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* a *es* L, *y se escribe* $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$, *si* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ *tal que*

$$a < x < a + \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

En los ejemplos anteriores se tiene que $\lim_{x \to 3^+} T(x) = 10$ y $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$.

Análogamente, se dice que *el límite por la izquierda de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* a *es* L, *y se escribe* $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$, *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ \textit{tal que} \ a - \delta < x < a \Longrightarrow |f(x) - L < \varepsilon$$

En los ejemplos anteriores se tiene:

$$\lim_{x \to 3^-} T(x) = 5 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$$

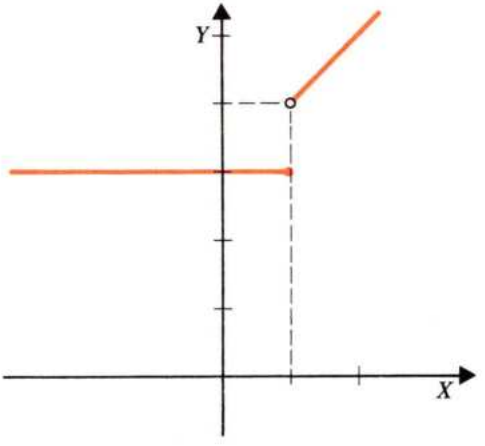
x	$f(x)$
0	1
0,5	0,5
0,9	0,1
0,99	0,01
0,999	0,001
0,9999	0,0001
.....	.....
2	5
1,5	3,25
1,1	2,21
1,05	2,1025
1,001	1,002001
.....	.....

(Fig. 26)

Ejemplo:

- Sea $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leqslant 1 \\ x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ (La gráfica de f es la de la figura 27); entonces $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$, ya que dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$, se tiene que si $1 - \delta < x < 1$ entonces $|f(x) - 3| = 0 < \varepsilon$. Por otra parte $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 4$, pues dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$, entonces si $1 < x < 1 + \delta$, se tiene:

$$|f(x) - 4| = |x + 3 - 4| = |x - 1| < \delta = \varepsilon.$$



(Fig. 27)

El siguiente teorema es de gran importancia para ver si una función tiene límite.

8.3. Teorema:

$\lim_{x \to a} f(x)$ *existe si y sólo si existen* $\lim_{x \to a^+} f(x)$ *y* $\lim_{x \to a^-} f(x)$ *y se verifica que* $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$.

Aunque no daremos la demostración del teorema, sin embargo es importante observar que para que exista $\lim_{x \to a} f(x)$ *no* basta que existan $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim_{x \to a^-} f(x)$ *sino que además estos valores deben ser iguales.*

Si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$, o si $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$, entonces la recta $x = a$ se dice que es una *asíntota vertical de f de ramas divergentes.*

29. Sea E la función parte entera que asocia a cada número real x el mayor entero menor que x. Haz la gráfica de E y calcula

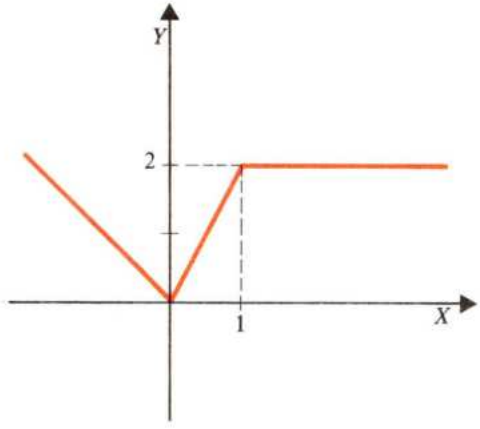
$$\lim_{x \to 4^+} E(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 4^-} E(x)$$

¿Existe $\lim_{x \to 4} E(x)$?

30. Si $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a^+} g(x) = L_2$, ¿es $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$?

Justifica tu respuesta.

31. Se considera la gráfica de la figura adjunta:



¿Cuáles de las relaciones

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$, $\lim_{x \to 2} f(x) = -2$

son verdaderas?

Ejercicios y cuestiones

32. Sea $f(x) = 3x + 2$. Halla $\lim_{x \to 0} f(x)$. Dado $\varepsilon = 0{,}001$, halla un conveniente δ.

33. Demuestra que $\lim_{x \to 3} (-3x + 4) = -5$.

34. Haz una tabla de valores próximos a 2 de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 0 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$$

y aprecia en ella el $\lim_{x \to 2} f(x)$.

35. Calcula $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$.

36. Halla $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + x - 2}$.

37. Halla $\lim_{x \to 1} \dfrac{5x^4 - 3x^2 + 7x}{x^4 + 8}$; $\lim_{x \to 0} \dfrac{3x^3 + 2}{6x^5 - 1}$; $\lim_{x \to 2} \dfrac{-3x^5 + 8}{x + 4}$

38. Halla $\lim_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 + 6x}{x + 4}$; $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^5 + 8x^3}{2x^5 + 1}$; $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^5 + 10x^3}{x + 7}$

39. Demuestra que si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x \to a} (fg)(x) = \infty$.

40. ¿Es cierto que, si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, es $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$? Pon un ejemplo que ilustre tu contestación.

41. Demuestra que si $c > 0$, entonces, si $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, se verifica que $\lim_{x \to a} (cf)(x) = -\infty$.

42. Calcula $\lim_{x \to 3^+} (x + 2)$ y $\lim_{x \to 3^-} (x + 2)$. ¿Qué se puede decir de la existencia de $\lim_{x \to 3} (x + 2)$?

43. Halla: $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ y $\lim_{x \to 2^-} f(x)$, siendo $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si} \quad x \geqslant 2 \\ 0 & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$

¿Existe $\lim_{x \to 2} f(x)$?

44. Calcula $\lim_{x \to \infty} \dfrac{5x^3 - 8x^2 + 6}{2x^4 - 3x^2 + 1}$; $\lim_{x \to \infty} \dfrac{12x^6 - x^4 + 1}{4x^6 - 3x^5 - 8x^2}$

45. Halla el siguiente límite: $\lim_{x \to 1} \dfrac{2x^3 - 14x^2 + 12x}{x^3 - 10x^2 + 27x - 18}$

Tema 14 CONTINUIDAD DE FUNCIONES REALES

Este tema está dedicado a estudiar la continuidad de las funciones reales de variable real. De manera intuitiva, una función es continua cuando su gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel; si este proceso no puede realizarse, para pasar de un punto a otro de la gráfica habrá que dar un salto en algún punto del dominio de la función; dicho punto se dice que es un punto de discontinuidad y la función se dirá que no es continua en dicho punto.

En este tema trataremos de formalizar esta idea intuitiva de continuidad; después se estudiará el comportamiento —respecto a la continuidad— de la suma, producto, cociente, composición, etc., de funciones y finalmente daremos una clasificación de las discontinuidades de una función.

1 Continuidad en un punto

1.1. Consideremos las funciones cuyas gráficas están dibujadas en la figura 1. Aunque estas gráficas son muy semejantes, de inmediato se observa que en $x = 0$ presentan un comportamiento muy distinto.

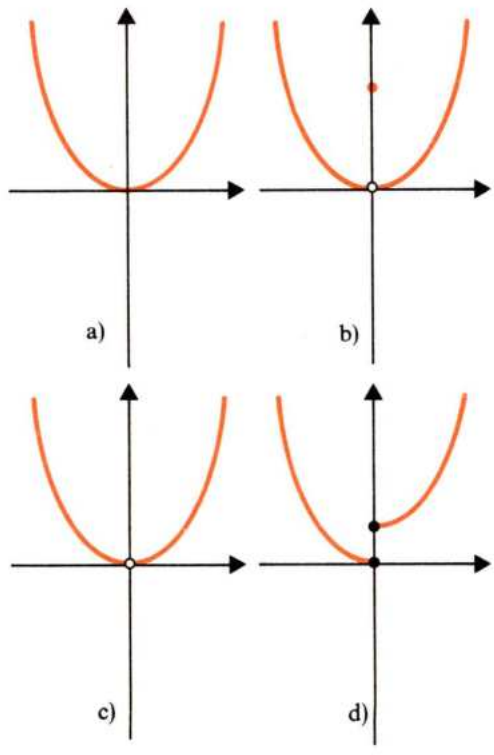
Mientras que la gráfica a) puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel, no ocurre así en b), c) y d), pues al llegar a $x = 0$ la gráfica se interrumpe.

Vamos a estudiar el motivo de estas interrupciones de la gráfica.

En b), al aproximarse al punto $x = 0$, la función toma valores muy próximos a cero, es decir, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$; sin embargo, $f(0) = 3$, luego se tiene que *existe* $\lim_{x\to 0} f(x)$, pero este límite *no* coincide con el valor de la función en $x = 0$; es decir,

$$\exists \lim_{x\to 0} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$$

En c) la función no está definida en $x = 0$, es decir, no existe $f(0)$.



(Fig. 1)

En d) si x toma valores próximos a cero, pero estrictamente menores que cero, entonces $f(x)$ se aproxima a cero; mientras que si los valores de x son estrictamente mayores que cero, entonces $f(x)$ se aproxima a uno; es decir, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$, entonces los límites laterales en $x = 0$ no coinciden y *no* existe límite de $f(x)$ en $x = 0$.

Entonces si queremos establecer un concepto de continuidad que responda a la idea de trazado sin levantar el lápiz del papel, debemos evitar en nuestra definición los tres casos anteriores. Esto conduce a la siguiente definición:

Una función real f se dice continua en $x = a$ si se verifican las tres condiciones:

a) **Existe f(a), es decir, $a \in$ Dom (f).**

b) **Existe $\lim_{x \to a} f(x)$.**

c) **$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.**

1.2. Veamos ahora cómo podemos averiguar si una función es continua en un punto.

Sea $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ 2x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

¿Es f continua en $x = 1$?

Comprobemos las tres condiciones de la definición:

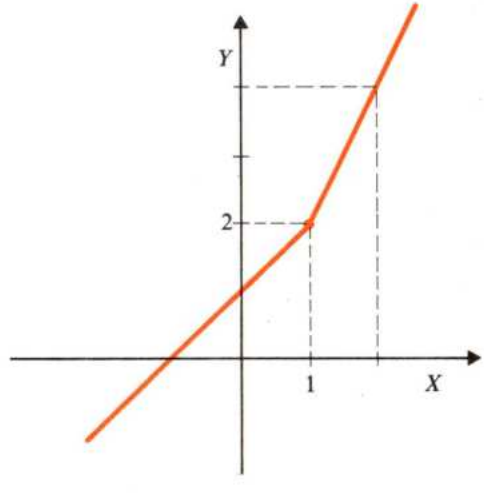
a) Existe $f(1) = 1 + 1 = 2$ (Fig. 2)

b) $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow$ Existe $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

De aquí que:

$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1)$, luego f es continua en $x = 1$.

La gráfica de f de la figura 2 nos muestra efectivamente la continuidad de f en $x = 1$.



(Fig. 2)

1.3. Consideremos ahora la función $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$; entonces y *no* es continua en $x = 1$, pues en dicho punto y no está definida, ya que el cociente $\dfrac{1-1}{1-1} = \dfrac{0}{0}$ no está definido y la condición a) de la definición de continuidad no se verifica.

A continuación se estudian otros dos.

Ejemplos:

- Sea la función $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 2 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$

  Entonces g es continua en $x = 1$, ya que existe

  $$g(1) = 2; \quad \lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

  y además $\lim_{x \to 1} g(x) = g(1) = 2$

- Sea la función $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

  h *no* es continua en $x = 0$, pues aunque existe $h(0) = 1$ y $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$, sin embargo $\lim_{x \to 0} h(x) \neq h(0)$.

Una función f se dice continua en un intervalo A si es continua en todo punto de A.

Ejercicios:

1. La función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

¿es continua en $x = 0$?, ¿y en $x = 3$? Dibuja la gráfica para ayudarte.

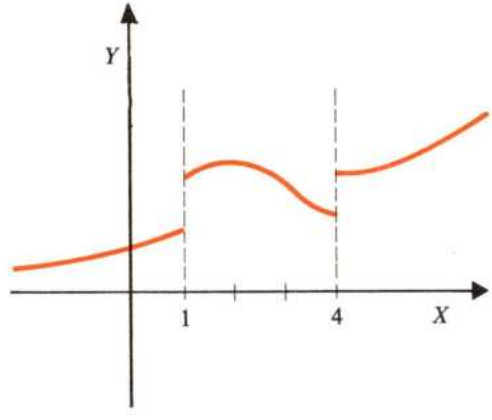
2. Representa la función

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{si} \quad x \neq -2 \\ -4 & \text{si} \quad x = -2 \end{cases}$$

¿Es g continua en $x = -2$?

3. ¿Es la función $y = x^2 + 4$ continua en $x = 0$?

4. La figura siguiente representa la gráfica de una función f.



Indica los puntos en los que f no es continua.

5. Dadas las funciones

$$f(x) = \frac{x - 1}{x + 3}$$

$$g(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si} \quad x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

$$h(x) = 3x^2 - \frac{2}{x}$$

halla los puntos en que no son continuas.

2 Criterios de continuidad

Recordando la definición de límite de una función en un punto $x = a$, se deduce que si $a \in \text{Dom}(f)$, entonces:

2.1. Teorema:

f es continua en $x = a \in Dom\ (f)$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Gráficamente esto significa que, dado un entorno simétrico de $f(a)$ de radio ε, E_ε, podemos encontrar un entorno E_δ de a tal que las imágenes por f de los puntos de E_δ pertenecen a E_ε; es decir, que para valores suficientemente próximos a a, los valores de f se aproximan tanto como queramos a $f(a)$.

Así, en la gráfica de la función f de la figura 3, se ve que f es continua en $x = a$, pues dado E_ε podemos encontrar el entorno E_δ de a tal que $\forall x \in E_\delta \ f(x) \in E_\varepsilon$, es decir:

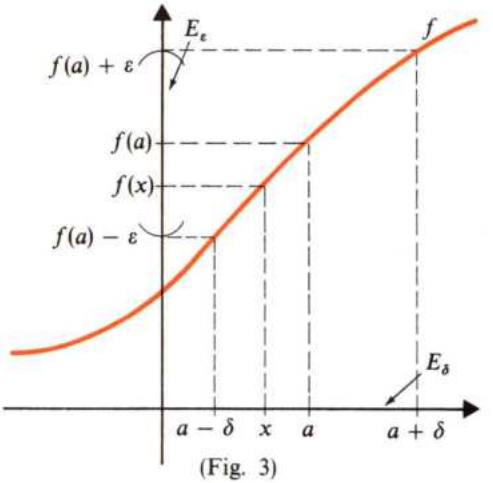
$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

En la figura 4 la función f no es continua en $x = a$, pues dado el entorno E_ε es inmediato ver que tomado cualquier entorno E_δ de a existen puntos de este entorno $x \in E_\delta$ tales que $f(x) \notin E_\varepsilon$; es decir, existen x tales que $|x - a| < \delta$, pero $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$

Se puede probar el siguiente teorema:

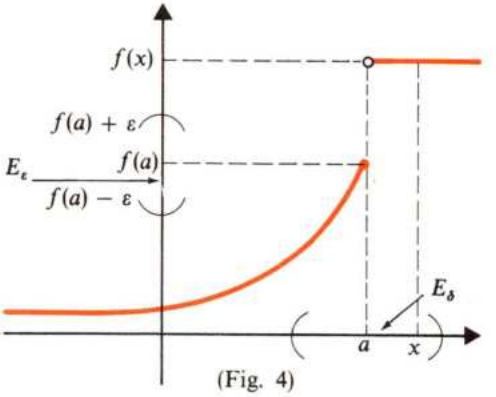
2.2. Teorema:

Una función f es continua en $x = a \in Dom\ (f)$ si y sólo si para todo entorno E de $f(a)$, $f^{-1}(E)$ es un entorno de a.



(Fig. 3)

f es continua en $x = a$



(Fig. 4)

f no es continua en $x = a$

3 Continuidad y operaciones con funciones

3.1. *Si f y g son continuas en $x = a$, entonces $f + g$ es continua en $x = a$.*

Si f es continua en $x = a$, entonces $a \in \text{Dom}\ (f)$; análogamente $a \in \text{Dom}\ (g)$, luego

$$a \in \text{Dom}\ (f) \cap \text{Dom}\ (g) = \text{Dom}\ (f + g)$$

Por tanto $f + g$ está definida en $x = a$.

Además, de las propiedades de los límites se tiene:

$$\lim_{x\to a}(f+g)=\lim_{x\to a}f+\lim_{x\to a}g=f(a)+g(a)=(f+g)(a)$$

luego $f+g$ es continua en $x=a$.

3.2. *Si f es continua en $x=a$, $-f$ es continua en $x=a$.*

3.3. *Si f y g son continuas en $x=a$, entonces $f-g$ es continua en $x=a$.*

En efecto: por la propiedad **3.2.** $-g$ es continua en $x=a$, y por la propiedad **3.1.** $f+(-g)=f-g$ es continua en $x=a$.

3.4. *Si $c\in\mathbb{R}$ y f es continua en $x=a$, entonces cf es continua en $x=a$.*

3.5. *Si f y g son continuas en $x=a$, entonces fg es continua en $x=a$.*

En efecto: por ser f y g continuas en a, $a\in\mathrm{Dom}(f)$ y $a\in\mathrm{Dom}(g)$, luego $a\in\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g)=\mathrm{Dom}(fg)$

de donde resulta que fg está definida en $x=a$.

Además, de las propiedades de los límites y por ser f y g continuas en $x=a$ se tiene:

$$\lim_{x\to a}(fg)=(\lim_{x\to a}f)\cdot(\lim_{x\to a}g)=f(a)\cdot g(a)=(fg)(a)$$

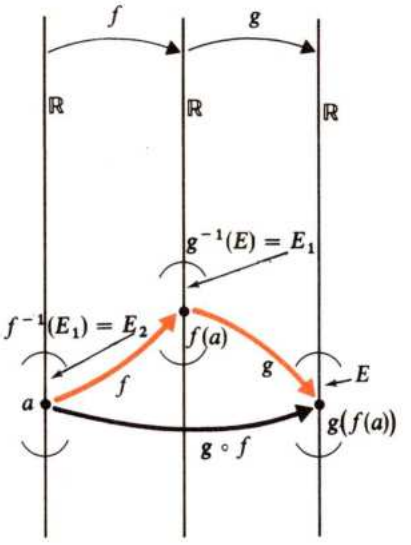
luego fg es continua en $x=a$.

3.6. *Si f es continua en $x=a$ y si $f(a)\neq 0$, entonces $\frac{1}{f}$ es continua en $x=a$.*

3.7. *Si f y g son continuas en $x=a$ y si $g(a)\neq 0$, $\frac{f}{g}$ está definida en un entorno de a y es continua en $x=a$.*

3.8. *Si f es continua en $x=a$ y g es continua en $y=f(a)$, entonces la composición $g\circ f$ es continua en $x=a$.*

En efecto: sea E un entorno de $(g\circ f)(a)=g(f(a))$; como g es continua en $f(a)$, $g^{-1}(E)=E_1$ es un entorno de $f(a)$, y como f es continua en a, $f^{-1}(E_1)=E_2$ es un entorno de a (Fig. 5); entonces por la propiedad estudiada en el apartado **12.6.** del tema 1 se tiene: $(g\circ f)^{-1}(E)=f^{-1}(g^{-1}(E))=f^{-1}(E)=E_2$.



(Fig. 5)

6. Demuestra que si una función f es continua en $x=a$, entonces $-f$ es continua en $x=a$. Da una justificación gráfica de este hecho.

7. Demuestra que si $c\in\mathbb{R}$ y f es continua en $x=a$, entonces cf es continua en $x=a$.

8. ¿Es la función $f(x)=3x+2$ continua en $x=-\frac{2}{3}$? ¿Y la función $\frac{1}{f}$?

9. Demuestra que si f es continua en $x=a$, entonces $\frac{1}{f}$ es continua en $x=a$ si $f(a)\neq 0$.

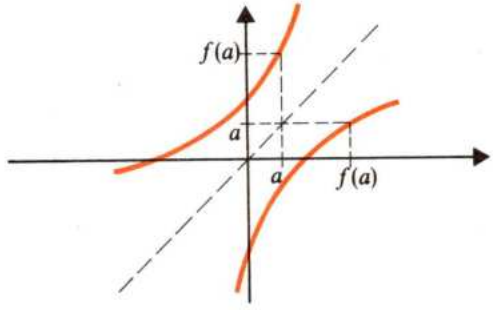
10. ¿Es continua en $x=6$ la función $f(x)=\frac{3x-1}{x-6}$?

11. El cociente de dos funciones polinómicas ¿es continuo? En caso negativo, indica en qué puntos no es continuo dicho cociente.

Hemos visto, pues, que la imagen recíproca de todo entorno de $g(f(a))$ es un entorno de a; luego aplicando el teorema **2.2.**, $g \circ f$ es continua en $x = a$.

3.9. *Si f es inyectiva y continua en $x = a$, entonces f^{-1} es continua en $x = f(a)$.*

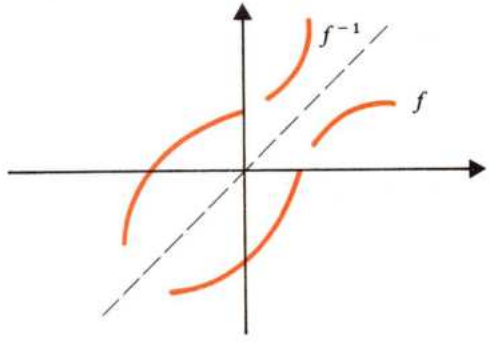
Aunque no vamos a dar una demostración del teorema, sin embargo, intuitivamente, la justificación es muy elemental, puesto que, al ser f continua, su gráfica se puede trazar sin levantar el lápiz del papel, pero como la gráfica de f^{-1} es la simétrica de la de f respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrante, resulta que la gráfica de f^{-1} a efectos de continuidad tendrá el mismo carácter que la de f; luego si f es continua, también lo será f^{-1} (Figs. 6 y 7).



(Fig. 6)

f es continua en $x = a$

f^{-1} es también continua en $x = f(a)$



(Fig. 7)

4 El espacio vectorial de las funciones continuas en]a,b[

Sea $]a, b[$ el intervalo abierto de extremos a y b. Representemos por $\mathscr{C}(]a, b[)$ el conjunto de todas las funciones continuas en $]a, b[$, es decir, el conjunto de todas las funciones que son continuas en todos los puntos del intervalo $]a, b[$.

Hemos visto que si f y g son funciones continuas en $x \in]a, b[$, entonces $f + g$ es continua en x; luego tenemos una operación interna definida en $\mathscr{C}(]a, b[)$.

$$\mathscr{C}(]\mathbf{a}, \mathbf{b}[) \times \mathscr{C}(]\mathbf{a}, \mathbf{b}[) \longrightarrow \mathscr{C}(]\mathbf{a}, \mathbf{b}[)$$
$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \longrightarrow \mathbf{f} + \mathbf{g}$$

También se ha visto que el producto de una función continua en $x \in]a, b[$ por un número real $c \in \mathbb{R}$ es continua en x, de donde tenemos una operación externa sobre $\mathscr{C}(]a, b[)$

$$\mathbb{R} \times \mathscr{C}(]a, b[) \longrightarrow \mathscr{C}(]a, b[)$$

$$(c, f) \longrightarrow cf$$

Se ha visto en el tema 11 que la suma de funciones es asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro y todo elemento tiene opuesto, de donde:

$(\mathscr{C}(]a, b[), +)$ **es un grupo abeliano.**

De las propiedades del producto de funciones por números se sigue que:

$(\mathscr{C}(]a, b[), +, \cdot\, \mathbb{R})$ *es un espacio vectorial real que se llama el espacio vectorial real de las funciones continuas en* $]a, b[$.

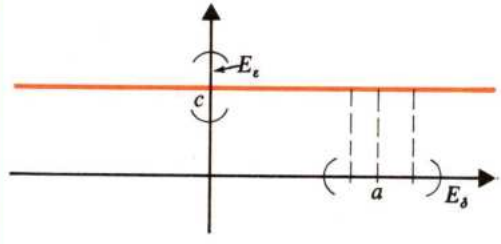
5 Algunos ejemplos importantes de funciones continuas

5.1. *Toda función constante es continua en cualquier punto.*

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función constante de valor c, es decir, $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = c$, y sea a un punto arbitrario. Si tomamos $\varepsilon > 0$, eligiendo $\delta = \varepsilon > 0$, entonces si $|x - a| < \delta$ se tiene que

$$|f(x) - f(a)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

La gráfica de la función constante de valor c (Fig. 8) muestra que efectivamente f es continua en cualquier punto.



(Fig. 8)

Función constante de valor c

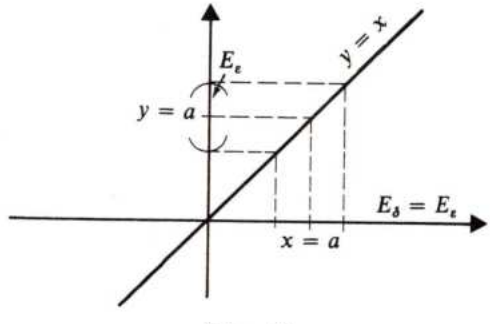
5.2. *La función identidad* $1_{\mathbb{R}}$ *es continua en todo punto.*

En efecto: sea el punto $x = a$. Dado $\varepsilon > 0$, y tomando $\delta = \varepsilon > 0$ se tiene que si $|x - a| < \delta$ entonces

$$|1_{\mathbb{R}}(x) - 1_{\mathbb{R}}(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon$$

luego $1_{\mathbb{R}}$ es continua en $x = a$.

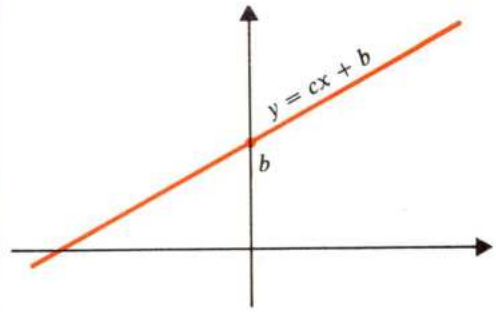
La gráfica de la función $1_{\mathbb{R}}$, dada por $1_{\mathbb{R}}(x) = x$ o $y = x$, de la figura 9 muestra la continuidad de dicha función.



(Fig. 9)

5.3. *La función afín* $y = cx + b$ *es continua en todo punto.*

En efecto: como la función $y = x$ es continua en todo punto, entonces $y = cx$ es continua en todo punto; y como la función constante $y = b$ es continua en todo punto, se tiene que la función $y = cx + b$ es continua en todo punto. (Fig. 10.)



(Fig. 10)

5.4. *Las funciones* $x^2, x^3, \ldots, x^n$ *son continuas en cualquier punto.*

Veámoslo para x^2. Como $1_{\mathbb{R}}(x) = x$ es continua en cualquier punto por **5.2.**, entonces $f = 1_{\mathbb{R}} \cdot 1_{\mathbb{R}}$ es continua en $x = x_0$, ya que el producto de funciones continuas es continua, entonces $f(x) = 1_{\mathbb{R}}(x) \cdot 1_{\mathbb{R}}(x) = x \cdot x = x^2$ es continua en $x = x_0$, como queríamos demostrar.

5.5. *Toda función polinómica es continua en cualquier punto.*

En efecto: sea la función polinómica $f(x) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n x^n$ y sea el punto $x = x_0$. Por **5.4.** las funciones $x, x^2, \ldots, x^n$ son continuas en x_0, y como el producto de una función continua en x_0 por un número real es continua en x_0, las funciones $a_1 x, a_2 x^2, \ldots, a_n x^n$ son continuas en x_0; finalmente, como la suma de funciones continuas en un punto es continua en dicho punto, entonces $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ es continua en x_0.

6 El anillo de las funciones continuas

Sabemos ya que $(\mathscr{C}(]a, b[), +)$ es un grupo abeliano. Como el producto de dos funciones continuas en un punto es otra función continua en el mismo punto, y esto se verifica $\forall x \in]a, b[$, resulta así una operación interna en $\mathscr{C}(]a, b[)$

$$\mathscr{C}(]\mathbf{a}, \mathbf{b}[) \times \mathscr{C}(]\mathbf{a}, \mathbf{b}[) \longrightarrow \mathscr{C}(]\mathbf{a}, \mathbf{b}[)$$

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \longrightarrow \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$$

Por ser asociativo el producto de funciones ocurre lo mismo con el producto de funciones continuas.

Como la función identidad se ha visto en **5.2.** que es continua, resulta que $(\mathscr{C}(]a, b[) +, \cdot)$ es un anillo con unidad que se llama el *anillo de las funciones continuas en el intervalo* $]a, b[$.

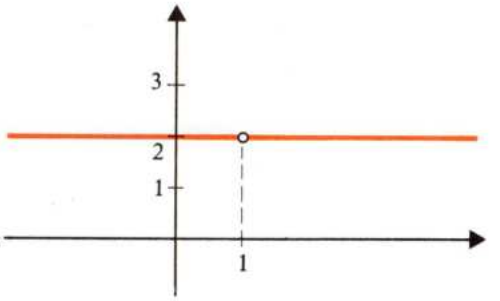
7 Discontinuidades de una función

7.1. Una función f se dice *discontinua en* $x = x_0$ o que *presenta una discontinuidad en el punto* x_0 si no es continua en el punto x_0.

Si una función f es discontinua en $x = x_0$, su gráfica presenta en el punto x_0 una «ruptura». Nuestro propósito es tratar de ilustrar los casos más sencillos de las discontinuidades según dicha «ruptura».

Las gráficas de las figuras 11, 12, 13 y 14 muestran distintos tipos de discontinuidades en el punto $x = 1$.

En la figura 11 la función f está dada por $f(x) = 2$; si $x \neq 1$, f *no* es continua en $x = 1$, puesto que no está definida en dicho punto; sin embargo, existe $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$, en este caso se dice que f presenta en $x = 1$ una *discontinuidad evitable.*

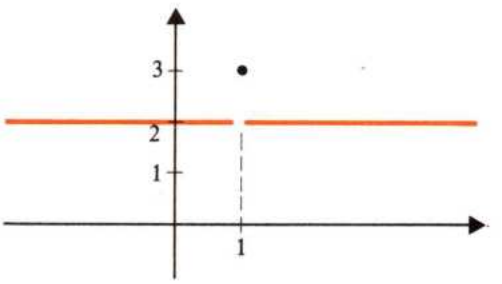


(Fig. 11)

En la figura 12 la función f está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 3 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

En este caso f *no* es continua en $x = 1$, pues aunque existe $f(1) = 3$, sin embargo, $\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \neq f(1)$. Se dice que f tiene una *discontinuidad de primera especie en* $x = 1$.



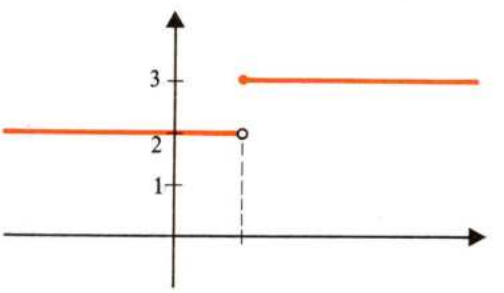
(Fig. 12)

En la figura 13 la función f está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ 3 & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

Se tiene que:

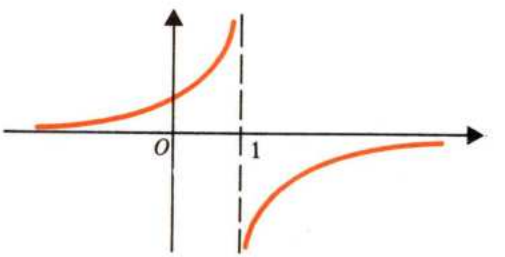
$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$ y $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$, es decir, que *no* existe $\lim_{x \to 1} f(x)$, luego f no es continua en $x = 1$. En este caso se dice que f presenta en $x = 1$ una *discontinuidad de segunda especie con salto finito.*



(Fig. 13)

En este caso se define el salto de la función en $x = 1$ como $s = \left| \lim_{x \to 1^+} f(x) - \lim_{x \to 1^-} f(x) \right|$.

En la figura 14, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$, luego la función *no* es continua en $x = 1$. Se dice que f tiene en $x = 1$ una *discontinuidad de segunda especie con salto infinito.*



(Fig. 14)

7.2. RESUMIENDO:

Si f es una función real y $x = x_0$ un punto, entonces:

f es continua en $x = x_0$ $\Longleftrightarrow$

- Existe $f(x_0)$.
- Existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

f no es continua en $x = x_0$ $\Longleftrightarrow$

a) No existe $f(x_0)$, y existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$. Discontinuidad evitable.

b) Existe $f(x_0)$ y existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$; $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Discontinuidad de 1.ª especie.

c) Existe $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$; existe $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$; $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$. Discontinuidad de 2.ª especie. Salto finito.

d) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$. Discontinuidad de 2.ª especie. Salto infinito.

Ejemplos:

- La función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 1 \end{cases}$ *no* es continua en $x = 1$, pues $\lim_{x \to 1^-} f = 0$ y $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1}{2}$, de donde f tiene en $x = 1$ una discontinuidad de 2.ª especie con salto finito; su salto es

$$s = |\lim_{x \to 1^+} f(x) - \lim_{x \to 1^-} f(x)| = |\frac{1}{2} - 0| = \frac{1}{2}$$

- La función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$ *no* es continua en $x = 0$, ya que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$. En este caso el punto $x = 0$ es una discontinuidad de primera especie de f.

- La función $f(x) = \frac{2}{x - 1}$ *no* es continua en $x = 1$, pues $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, es decir, que en $x = 1$ f tiene una discontinuidad de 2.ª especie con salto infinito.

12. Estudia los puntos de discontinuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2 & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 2 \\ x & \text{si} \quad 2 \leqslant x \end{cases}$$

13. Comprueba que en el punto $x = 1$ la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 3x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

presenta una discontinuidad de 2.ª especie con salto finito. Halla el salto.

14. Demuestra que la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ es discontinua en $x = 2$ y encuentra una función que coincida con f en todo el dominio de f y que sea continua en $x = 2$.

Ejercicios y cuestiones

15. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$

y estudia su continuidad en $x = 0$.

16. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{3x^2 - 9}{x - \sqrt{3}}$ en $x = \sqrt{3}$.

17. Idem de la función $f(x) = x + 3$ en el punto $x = 0$.

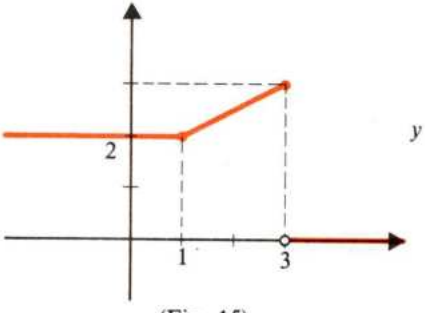
18. Representa gráficamente la siguiente función y estudia su continuidad:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 3 \\ 2x + 1 & \text{si} \quad 3 \leqslant x < 5 \\ 4 & \text{si} \quad 5 \leqslant x \end{cases}$$

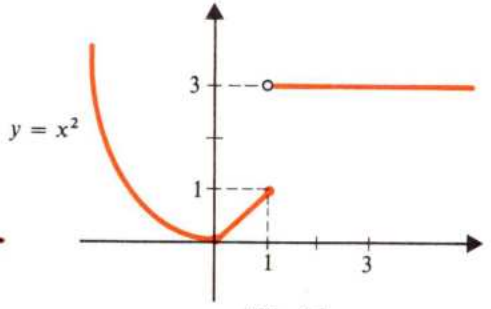
19. Dadas las funciones cuyas gráficas son las de las figuras 15, 16 y 17 se pide:

a) Expresión analítica de dichas funciones.

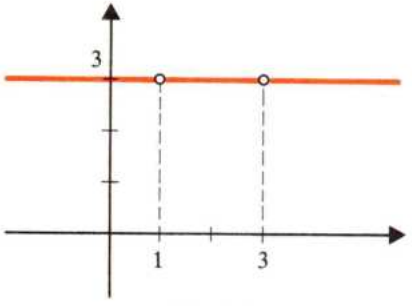
b) Estudio de la continuidad de dichas funciones en el intervalo $[0, 3]$.



(Fig. 15)



(Fig. 16)



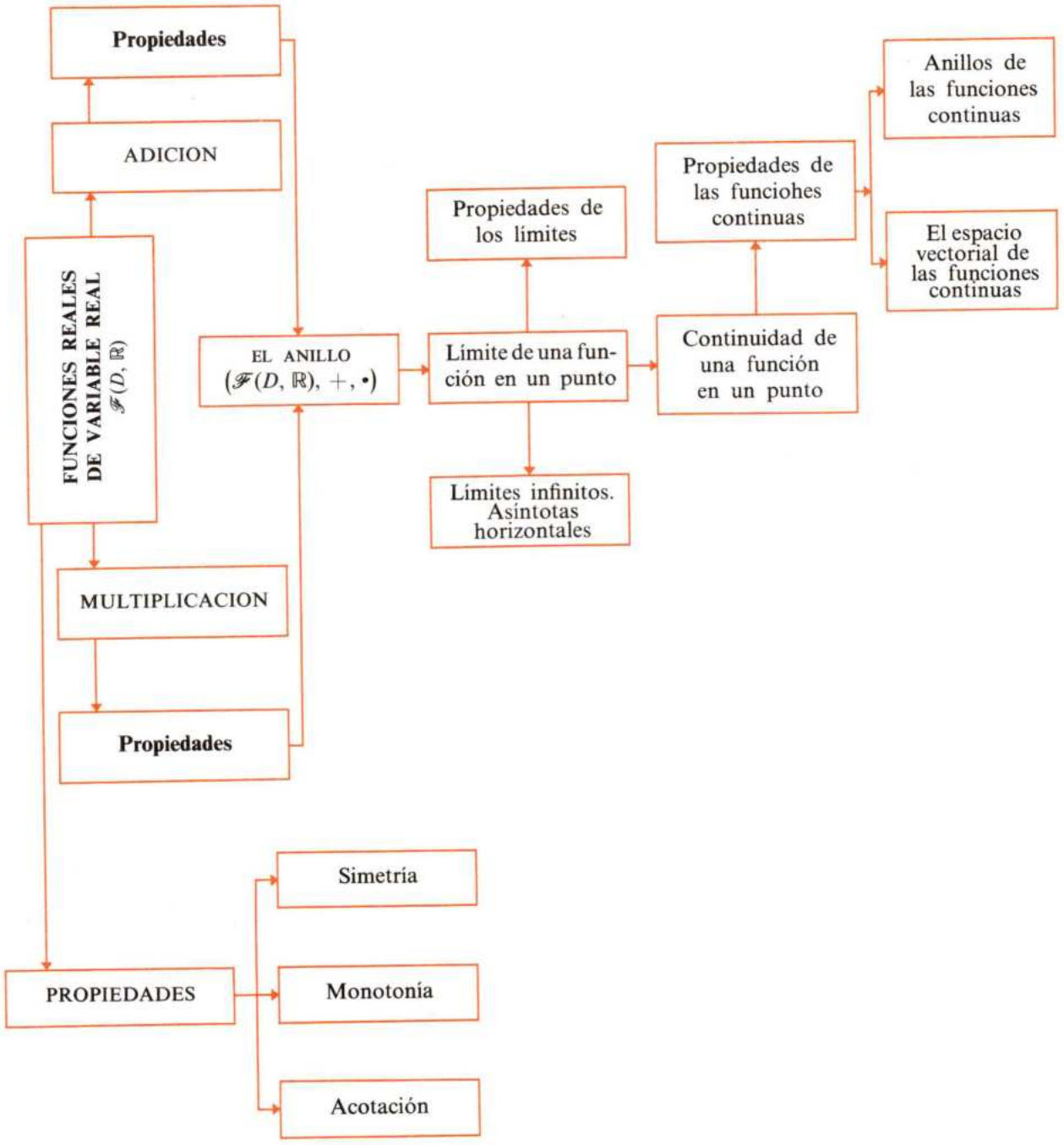
(Fig. 17)

20. Halla el tipo de discontinuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3}$ b) $f(x) = \dfrac{-1}{x}$

DIAGRAMA ESTRUCTURAL DE LA UNIDAD 4

FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL. LIMITE Y CONTINUIDAD



Unidad 5

FUNCIONES CIRCULARES. FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARITMICA

Varias funciones no algebraicas que son importantes en la matemática elemental y superior se estudian en esta Unidad.

Además del estudio de las funciones circulares y su representación gráfica, que se realiza en el tema 15, se aborda en el tema 16 la resolución de triángulos rectángulos que tanta aplicación tiene en el curso de Física.

En el tema 17 se estudia la función exponencial y su función recíproca: la función logarítmica.

Algunas propiedades de estas funciones no se pueden establecer de modo riguroso si queremos mantenernos al mismo tiempo en un nivel elemental.

Al final del libro figuran unas tablas de logaritmos de cuatro cifras y unas tablas trigonométricas naturales que se pueden utilizar para resolver los problemas propuestos en esta Unidad.

Tema 15

1. Noción intuitiva de ángulo orientado.
2. El radián.
3. Razones trigonométricas o circulares.
4. Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo.
5. Razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°.
6. Función seno.
7. Función coseno.
8. Función tangente.
9. Función cosecante.
10. Función secante.
11. Función cotangente.
12. Funciones trigonométricas recíprocas.
13. Interpretación trigonométrica de la pendiente de una recta.

Tema 16

1. Reducción al primer cuadrante.
2. Tablas naturales. Interpolación.
3. Resolución de triángulos rectángulos.

Tema 17

1. Potencia de exponente racional.
2. Propiedades de las potencias racionales.
3. Potencia de exponente real.
4. Función exponencial de exponente real.
5. La función $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Interés continuo.
6. Definición de logaritmo: Propiedades.
7. Función logarítmica: Propiedades.
8. Logaritmos decimales.
9. Manejo de las tablas.
10. Cologaritmos.
11. Cambio de base.

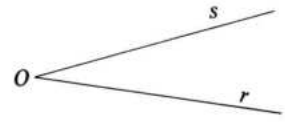
Tema 15 FUNCIONES CIRCULARES

Se inicia el tema con la noción intuitiva de ángulo orientado y la definición de radián. Luego se definen las distintas razones trigonométricas de un ángulo y se demuestran ciertas relaciones fundamentales entre algunas de ellas. Como aplicación de lo estudiado, y por ser de uso frecuente, se calculan los valores de las razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°.

La parte final se dedica al estudio de las funciones trigonométricas y a sus correspondientes funciones recíprocas.

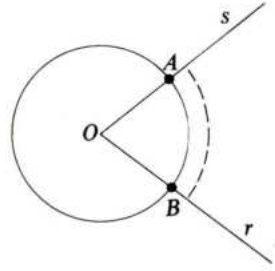
1 Noción intuitiva de ángulo orientado

1.1. Dos semirrectas, r y s, con un origen común O dividen al plano en dos regiones (Fig. 1). Cada una de ellas es un ángulo. Las semirrectas r y s son los lados de ambos ángulos y O el vértice.



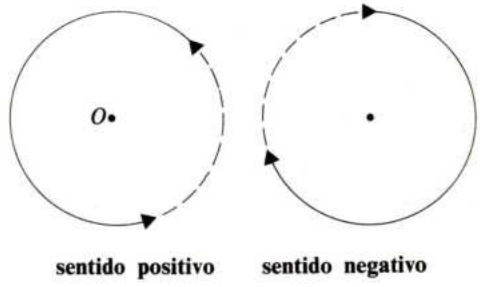
(Fig. 1)

Tracemos una circunferencia con centro en O y radio arbitrario (Fig. 2). Las semirrectas r y s determinan sobre la circunferencia dos arcos. A cada uno de ellos le corresponde un ángulo.



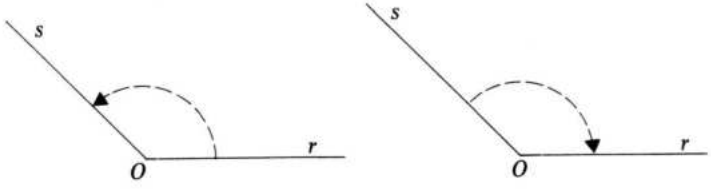
(Fig. 2)

A partir de un punto arbitrario de la circunferencia se puede volver a él, siguiendo la circunferencia, de dos maneras. Fijaremos el siguiente convenio: Si el recorrido se hace en forma contraria al seguido por las agujas de un reloj, diremos que la circunferencia está recorrida en sentido positivo. En caso contrario, diremos que lo está en sentido negativo (Fig. 3).



(Fig. 3)

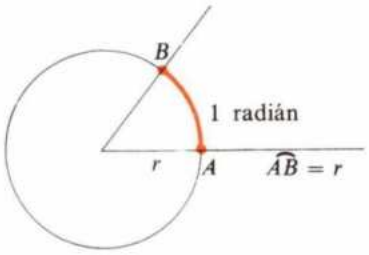
El arco de circunferencia que fija un ángulo cualquiera de lados r y s (Fig. 3) lo podemos considerar con un sentido de recorrido. Si éste es positivo, el ángulo también se considera positivo. En caso contrario se dice que es negativo. En ambos casos el ángulo se dice que está orientado (Fig. 4).



(Fig. 4)

2 El radián

Se define el radián como la medida del ángulo central correspondiente a un arco de longitud igual al radio de la circunferencia (Fig. 5).



(Fig. 5)

Como la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, la medida en radianes del ángulo central correspondiente a una circunferencia completa es 2π. De aquí se sigue la siguiente relación entre grados sexagesimales y radianes:

$$360° = 2\pi \text{ radianes}$$

que nos permite obtener la medida en radianes de cualquier ángulo conociendo su medida en grados sexagesimales y recíprocamente.

Ejemplos:

- La medida en grados de un ángulo de 1 radián es:

$$1 \text{ radián} = \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi}$$

Se obtiene el siguiente valor aproximado para el radián:

$$1 \text{ radián} = 57°17'45''$$

- La medida de radianes del ángulo de 1° es:

$1° = \frac{2\pi}{360}$ radianes $= \frac{\pi}{180}$ rad $= 0{,}01745$ radianes, aproximadamente.

Como

$360° = 2\pi$ radianes, resulta que:

$180° = \pi$ radianes

$90° = \frac{\pi}{2}$ radianes

$45° = \frac{\pi}{4}$ radianes

$22°30' = \frac{\pi}{8}$ radianes.

Ejercicios:

1. Expresa en radianes los ángulos de 45°, 90°, 180°, 270° y 360°.

2. Expresa en radianes cada uno de los ángulos siguientes: 10°, 30°, 60°, 135°, 240°, 260°.

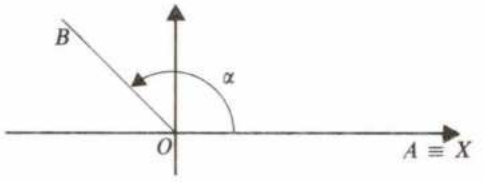
3. Expresa en grados sexagesimales cada uno de los ángulos siguientes:

$$\frac{2\pi}{3} \text{ rad.} \quad \frac{3\pi}{5} \text{ rad.} \quad \frac{9\pi}{6} \text{ rad.}$$

4. Si un arco de una circunferencia de radio r mide $\frac{2}{3}r$, ¿cuál es la medida del ángulo central correspondiente expresada en radianes?

3 Razones trigonométricas o circulares

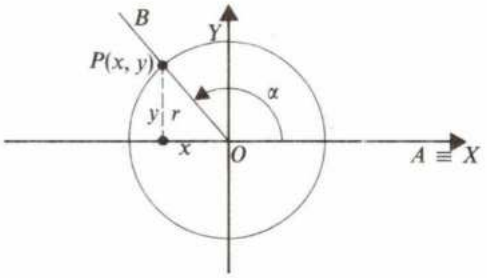
3.1. Consideremos el ángulo orientado AOB cuya medida en radianes es α; este ángulo se llamará también ángulo α, a OA le denominaremos primer lado y a OB su segundo lado (Fig. 6).



(Fig. 6)

Fijemos un sistema de referencia de ejes perpendiculares, cuyo semieje de abcisas positivas coincida con el lado OA (Fig. 7).

Trazemos una circunferencia con centro en O y radio arbitrario r (Fig. 7). Sea P el punto de coordenadas (x, y) en que esta circunferencia corta al *segundo lado* OB del ángulo α. Diremos que α es un ángulo del cuadrante en que se encuentra P.



(Fig. 7)

Las razones *trigonométricas* o *circulares* del ángulo α se definen así:

SENO: $\quad \mathbf{sen}\ \alpha = \dfrac{y}{r} = \dfrac{\textbf{ordenada}}{\textbf{radio}}$

COSENO: $\quad \mathbf{cos}\ \alpha = \dfrac{x}{r} = \dfrac{\textbf{abcisa}}{\textbf{radio}}$

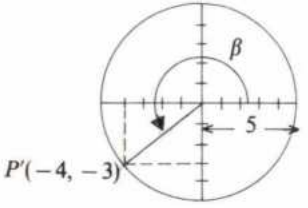
TANGENTE: $\quad \mathbf{tg}\ \alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\textbf{ordenada}}{\textbf{abcisa}}$

COSECANTE: $\quad \mathbf{cosec}\ \alpha = \dfrac{r}{y} = \dfrac{\textbf{radio}}{\textbf{ordenada}}$

SECANTE: $\quad \mathbf{sec}\ \alpha = \dfrac{r}{x} = \dfrac{\textbf{radio}}{\textbf{abcisa}}$

COTANGENTE: $\quad \mathbf{cot}\ \alpha = \dfrac{x}{y} = \dfrac{\textbf{abcisa}}{\textbf{ordenada}}$

Ejemplo:



(Fig. 8)

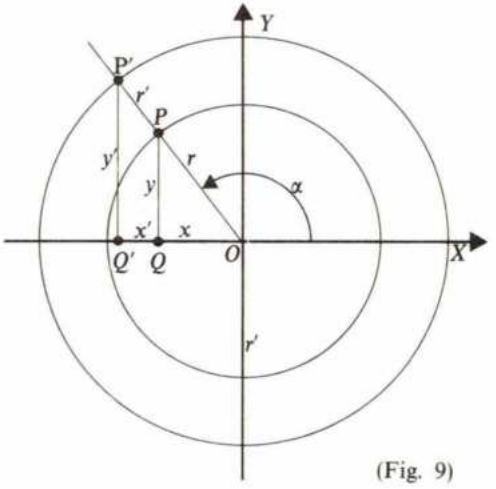
- Las razones trigonométricas del ángulo β de la figura 8 son:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{-3}{5}; \quad \cos\beta = \frac{-4}{5}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{cosec}\beta = \frac{5}{-3} = \frac{-5}{3}; \quad \sec\beta = \frac{5}{-4} = \frac{-5}{4}; \quad \cot\beta = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

3.2. Si consideramos otra circunferencia de radio $r'(r' \neq r)$ (Fig. 9), obtendremos otro punto P' cuyas coordenadas (x', y') serán distintas de las de P. Veamos que las razones trigonométricas del ángulo son independientes del radio.

En efecto: dada la semejanza de los triángulos OPQ y $OP'Q'$, se tienen las siguientes proporciones:



(Fig. 9)

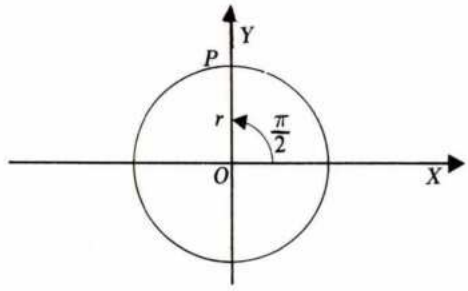
$$\frac{y}{r} = \frac{y'}{r'}, \quad \frac{x}{r} = \frac{x'}{r'}, \quad \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}, \quad \frac{r}{y} = \frac{r'}{y'}, \quad \frac{r}{x} = \frac{r'}{x'}, \quad \frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$$

Entonces podemos escribir $\text{sen}\,\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y'}{r'}$ y proceder de forma análoga con las restantes razones trigonométricas.

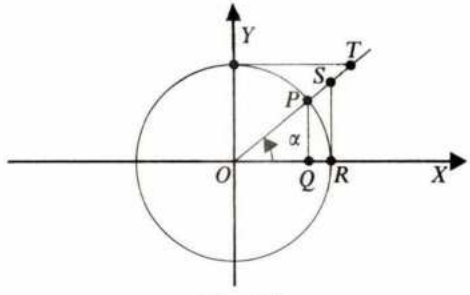
Existen ángulos para los que no tiene sentido la definición de alguna de las razones trigonométricas.

Ejemplo:

- Si aplicamos la definición para obtener $\text{tg}\,\frac{\pi}{2}$ (Fig. 10), tendríamos que escribir $\text{tg}\,\frac{\pi}{2} = \frac{r}{0}$, expresión que no tiene sentido. En casos como este diremos que, para el ángulo dado, la correspondiente razón trigonométrica no está definida.



(Fig. 10)



(Fig. 11)

3.3. Como las razones trigonométricas de un ángulo son independientes del radio de la *circunferencia auxiliar*, podemos elegir una circunferencia de radio igual a la unidad, $r = 1$. Tenemos así la *circunferencia goniométrica* o *circunferencia unidad*. Esta elección del radio nos va a permitir encontrar fácilmente para cada razón trigonométrica de un ángulo dado un segmento cuya medida sea esta razón.

Para un ángulo α del primer cuadrante (Fig. 11) obtenemos directamente de la figura:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{QP}{OP} = \frac{QP}{1} = \text{medida de } QP$$

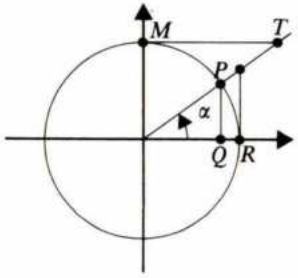
$$\cos\alpha = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ}{1} = \text{medida de } OQ$$

Por ser semejantes los triángulos OQP y ORS (Figs. 12, 13, 14 y 15) podemos escribir:

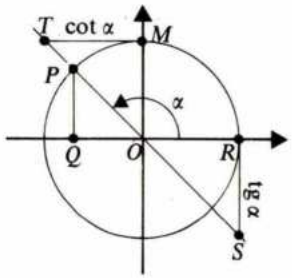
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{QP}{OQ} = \frac{RS}{OR} = \frac{RS}{1} = \text{medida de } RS$$

$$\sec\alpha = \frac{OP}{OQ} = \frac{OS}{OR} = \frac{OS}{1} = \text{medida de } OS$$

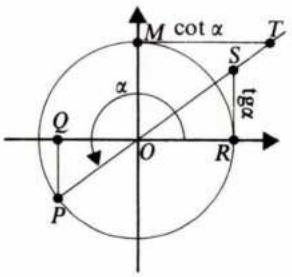
5. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos de 90°, 180° y 270°. Indica cuáles no están definidas.



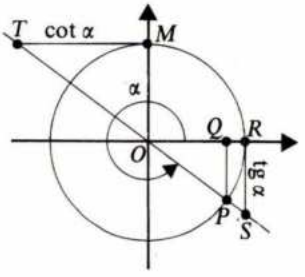
(Fig. 12)



(Fig. 13)



(Fig. 14)



(Fig. 15)

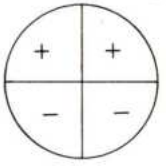
En cualquiera de las figuras 12, 13, 14 ó 15 se observa que los triángulos OMT y OPQ son semejantes, ya que el ángulo MTO es complementario del ángulo TOM, por tanto

$$\cot \alpha = \frac{OQ}{QP} = \frac{MT}{OM} = \frac{MT}{1} = \text{medida de } MT$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{OP}{QP} = \frac{OT}{OM} = \frac{OT}{1} = \text{medida de } OT$$

Para ángulos del segundo cuadrante (Fig. 13), tercer cuadrante (Fig. 14) y cuarto cuadrante (Fig. 15) se pueden hacer razonamientos análogos para obtener las representaciones que se indican en las respectivas figuras.

6. Comprueba que el signo de las razones trigonométricas de un ángulo α depende únicamente del cuadrante a que pertenezca. Para el seno y la cosecante se tiene el siguiente esquema:



seno y cosecante

Construye otros similares para: a) el coseno y la secante, b) la tangente y la cotangente.

4 Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo

Vamos a obtener algunas relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo, que nos permitirán, conocida una, hallar todas las demás, siempre que estén definidas.

Probemos en primer lugar que $\mathbf{sen^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1}$ [1].

Tengamos en cuenta que $\operatorname{sen}^2 \alpha$ significa $(\operatorname{sen} \alpha)^2$; análogamente: $\cos^2 \alpha = (\cos \alpha)^2$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

con lo que queda probada la relación [1].

Como

a) $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$, resulta que $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$ [2]

b) $\cot \alpha = \dfrac{x}{y} = \dfrac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \dfrac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \Longrightarrow \cot \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$ [3]

Por otra parte

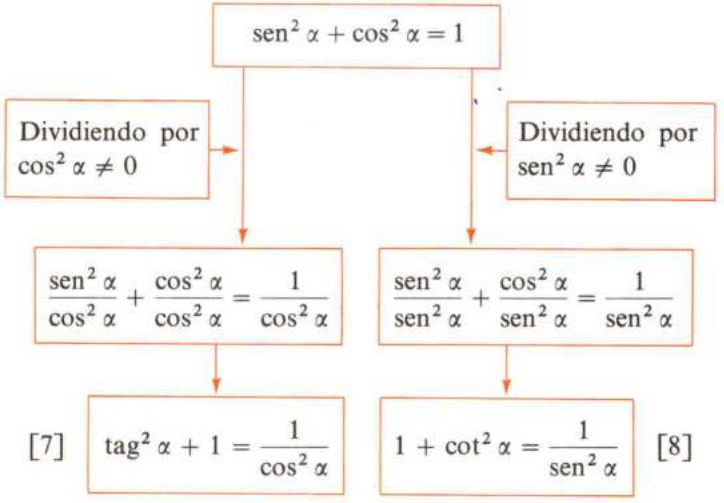
a) $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{r}{y} = \dfrac{1}{\frac{y}{r}} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \Longrightarrow \operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$ [4]

b) $\sec\alpha = \dfrac{r}{x} = \dfrac{1}{\frac{x}{r}} = \dfrac{1}{\cos\alpha} \Longrightarrow \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ [5]

c) $\cot\alpha = \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{\frac{y}{x}} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \Longrightarrow \cot\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ [6]

A la relación $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ se le designa a veces con el nombre de *fórmula fundamental*: de ella vamos a obtener dos fórmulas que se usan frecuentemente.

El esquema siguiente indica el modo de deducirlas:



Es de notar que la fórmula [7] no se puede aplicar en aquellos casos en que $\cos\alpha = 0$. ¿Para qué casos no se puede aplicar la fórmula [8]?

Ejemplos:

- Las razones trigonométricas de un ángulo α del segundo cuadrante tal que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{5}$ se pueden obtener como se indica a continuación:

$$\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha \Longrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha} =$$

$$= \pm\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$$

7. Demuestra la siguiente igualdad:

$$\sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha = (\operatorname{tg}\alpha + \cot\alpha)^2$$

8. Deduce geométricamente las relaciones [1], [7] y [8]. Te puede servir de orientación el saber que se conocen con el nombre de *relaciones pitagóricas.*

Como α es un ángulo del segundo cuadrante, cos α es negativo, por lo que la solución $\frac{4}{5}$ no nos vale. Luego $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}; \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4}; \quad \cot\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$$

- Si α es un ángulo del tercer cuadrante tal que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{4}$, el valor de cos α se puede obtener a partir de la relación [7]

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \pm\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1} = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 1} = \pm\sqrt{\frac{25}{16} + 1} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{41}{16}} = \pm\frac{\sqrt{41}}{4}$$

De donde $$\cos\alpha = \pm\frac{4}{\sqrt{41}}$$

Como α es un ángulo del tercer cuadrante, cos α es negativo, por lo que el valor que buscamos es

$$\cos\alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}}$$

9. Encuentra los valores que puede tener cos α sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. ¿A qué cuadrantes puede pertenecer α? Justifícalo.

10. ¿Puede haber algún ángulo α que cumpla las igualdades $\operatorname{tg}\alpha = 5$, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$? Justifica la respuesta.

11. Sabiendo que $\cot\alpha = -\sqrt{3}$ para un ángulo α del cuarto cuadrante, determina las restantes razones trigonométricas.

12. ¿A qué cuadrantes debe pertenecer un ángulo α tal que $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$ y cuál es el valor de sec α en cada caso?

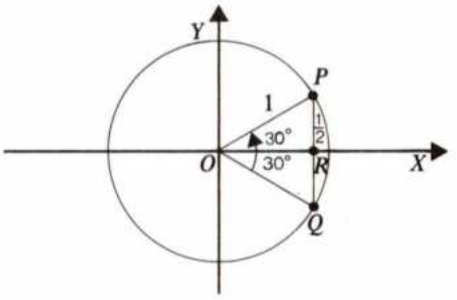
5 Razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°

5.1. Angulo de 30°.

La longitud de la altura OR del triángulo equilátero OQP (Fig. 16) de lado unidad se calcula fácilmente por el teorema de Pitágoras, aplicado al triángulo rectángulo ORP:

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1; \quad x^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

de donde: $$x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



(Fig. 16)

Por las definiciones correspondientes, se tiene:

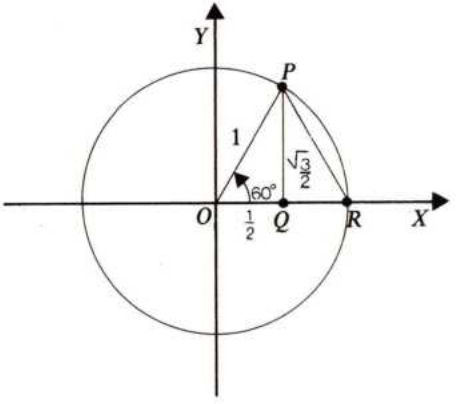
$$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}; \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{tg } 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{cosec } 30° = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2; \quad \sec 30° = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

5.2. Angulo de 60°.

La altura PQ del triángulo equilátero OPR de lado unidad (Fig. 17) sabemos, por haberla calculado anteriormente, que tiene de longitud $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



(Fig. 17)

Aplicando las definiciones correspondientes a cada razón, se tiene:

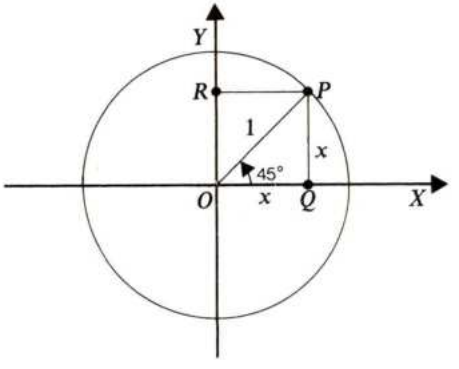
$$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \text{cosec } 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2}; \qquad \sec 60° = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\text{tag } 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}; \qquad \cot 60° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

5.3. Angulo de 45°.

Llamemos x a la longitud de cualquier lado del cuadrado $OQPR$ (Fig. 18) que tiene diagonales de longitud la unidad.



(Fig. 18)

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo OPQ, tenemos:

$$x^2 + x^2 = 1 \Longrightarrow 2x^2 = 1 \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Las definiciones correspondientes nos dan para cada razón:

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \operatorname{cosec} 45° = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \sec 45° = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1; \qquad \cot 45° = \frac{1}{1} = 1$$

ángulo	seno	coseno	tangente
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

6 Función seno

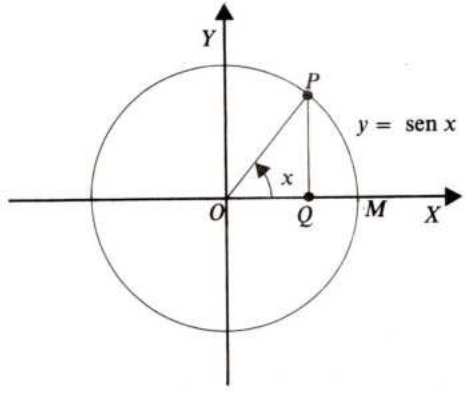
6.1. Supongamos que el punto P (Fig. 19), después de dar una vuelta completa, recorre nuevamente la circunferencia. En esta *segunda vuelta*, P determina ángulos MOP que tienen el mismo seno que los ángulos que tienen la misma *representación gráfica*, pero que consideramos descritos en la *primera vuelta*.

Si la medida en radianes del ángulo MOP es x, su seno es $\operatorname{sen} x = \overline{QP}$. Si consideramos el ángulo MOP después de haber descrito el punto P una circunferencia, será:

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x = QP$$

Cuando P recorre la circunferencia un número cualquiera de veces, por un razonamiento análogo podemos escribir:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + k \cdot 2\pi)$$



(Fig. 19)

6.2. Sea x un número real cualquiera y sen x el seno de un ángulo cuya medida en radianes es x.

A la aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por $x \longrightarrow y = \operatorname{sen} x$ se le llama función *seno*.

Para hacer el estudio de esta función consideremos la circunferencia de la figura 19 y un punto variable P que la recorre en sentido positivo, partiendo del punto M. La medida en radianes de los distintos ángulos MOP varía de 0 a 2π.

Como los valores del seno de estos ángulos vienen dados por las ordenadas del punto variable P, fácilmente se deducen las siguientes propiedades:

6.3. La función $y = \operatorname{sen} x$ es creciente para ángulos del primer cuadrante, es decir, para los x comprendidos entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, y toma valores comprendidos entre 0 $(\operatorname{sen} 0 = 0)$ y 1 $\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1\right)$

Para ángulos del segundo cuadrante, sen x decrece alcanzando todos los valores comprendidos entre 1 $\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1\right)$ y 0 $(\operatorname{sen} \pi = 0)$.

Para ángulos del tercer cuadrante, cuando x toma valores de π a $\frac{3\pi}{2}$, sen x decrece de 0 $\left(\operatorname{sen} \pi = 0\right)$ a -1 $\left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -1\right)$ alcanzando todos los valores negativos comprendidos entre 0 y -1.

Para ángulos del cuarto cuadrante, sen x crece de

$$-1\left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -1\right) \text{ a } 0\,(\operatorname{sen} 2\pi = 0).$$

Todo lo anterior se resume en el recuadro siguiente:

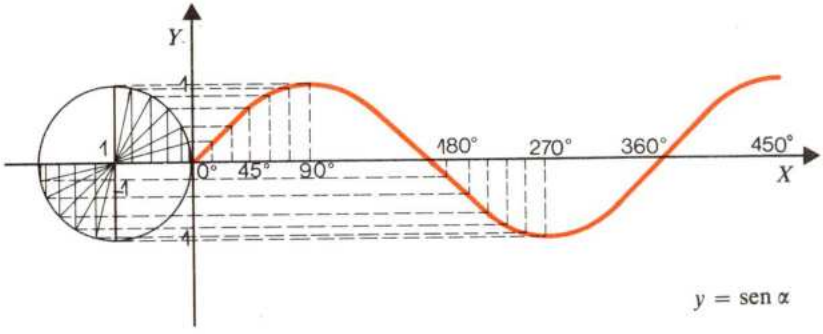
x	0	crece	$\frac{\pi}{2}$	crece	π	crece	$\frac{3\pi}{2}$	crece	2π
sen x	0	crece	1	decrece	0	decrece	-1	crece	0

6.4. *Una función* $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *se dice que es periódica, de período* t, *si* $\mathbf{f(x + t) = f(x)}$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Como sen $(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$, resulta que la función *seno* es periódica, con período 2π; por ello es suficiente hacer el estudio de la misma en el intervalo $[0, 2\pi]$ visto anteriormente.

6.5. De la igualdad $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, y teniendo en cuenta que $\text{sen}^2 x \geqslant 0$ y $\cos^2 x \geqslant 0$, se deduce que $\text{sen}^2 x \leqslant 1$, luego $|\text{sen } x| \leqslant 1$. Como este resultado es válido para todo $x \in \mathbb{R}$, queda demostrado que la función *seno* es acotada.

Estas consideraciones no permiten dibujar la gráfica de la función *seno*, si bien nos dan una idea aproximada de dicha gráfica, que se llama *sinusoide*. (Fig. 20.)



(Fig. 20)

7 Función coseno

La aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

$$x \longrightarrow y = \cos x \text{ se llama función } \textit{coseno}.$$

Un estudio similar al hecho para la función *seno* nos permite escribir las siguientes propiedades de la función *coseno*:

1.ª) El comportamiento de la función *coseno* se puede obtener a partir del de la abcisa de un punto variable P (Fig. 21).

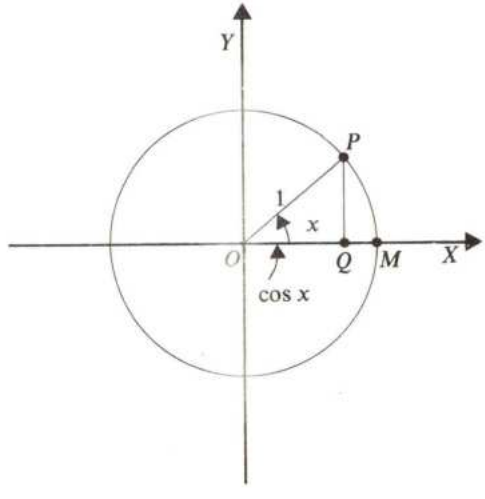
Se obtiene el siguiente cuadro:

x	0	crece	$\frac{\pi}{2}$	crece	π	crece	$\frac{3\pi}{2}$	crece	2π
$\cos x$	1	decrece	0	decrece	-1	crece	0	crece	1

2.ª) Es una función periódica, de período 2π:

$$\cos x = \cos (x + 2\pi)$$

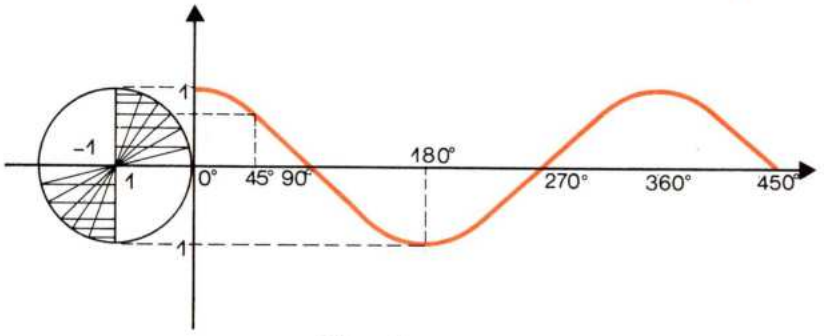
Cuando P recorre la circunferencia un número k de veces, se tiene: $\cos x = \cos (x + k \cdot 2\pi)$.



(Fig. 21)

3.ª) Como $\cos^2 x \leqslant 1$, se deduce que $|\cos x| \leqslant 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, luego la función *coseno* es acotada.

La gráfica de la función *coseno* (Fig. 22) se llama *cosinusoide*.



(Fig. 22)

8 Función tangente

La correspondencia en $\mathbb{R} : x \longrightarrow y = \operatorname{tg} x$ determina una función que se llama función *tangente*, cuyo dominio es

$$\mathbb{R} - \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots \right\}$$

En efecto, puesto que $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, para los $x \in \mathbb{R}$ tales que $\cos x = 0$, es decir, para $\cdots -\dfrac{5\pi}{2}, -\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2} \cdots$ $\operatorname{tg} x$ no está definida.

Siendo $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, el comportamiento de la función *tangente* se puede deducir del de las funciones *seno* y *coseno*. En el siguiente recuadro presentamos un resumen:

x	0	crece	$\frac{\pi}{2}$	crece	π	crece	$\frac{3\pi}{2}$	crece	2π
$\operatorname{tg} x$	0	crece	No def.	crece	0	crece	No def.	crece	0

La función *tangente* no está definida para $x = \dfrac{\pi}{2}$, pero está definida para valores x tan *próximos* a $\dfrac{\pi}{2}$ como se quiera.

Para estos x *próximos* a $\frac{\pi}{2}$, la razón $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ alcanza valores positivos tan *grandes* como se quiera si $x < \frac{\pi}{2}$. Este hecho se escribe de una manera precisa utilizando el concepto de límite:

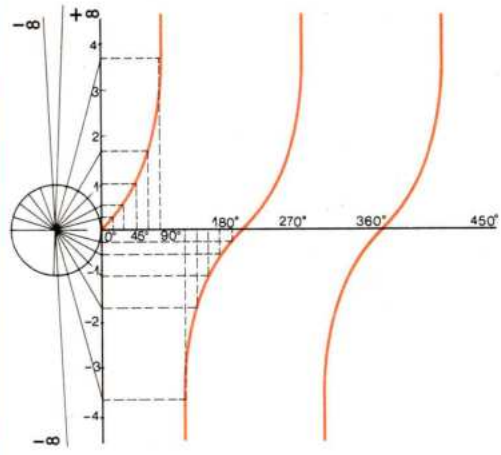
$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \operatorname{tg} x = +\infty$$

También se tiene:

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \operatorname{tg} x = -\infty, \qquad \lim_{x \to \left(\frac{3\pi}{2}\right)^-} \operatorname{tg} x = +\infty, \qquad \lim_{x \to \left(\frac{3\pi}{2}\right)^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$

La gráfica de la función $y = \operatorname{tg} x$ es la de la figura 23, y se llama *tangentoide*.

La función *tangente* tiene por conjunto imagen el conjunto $\mathbb{R}$ y es periódica, con período π.



(Fig. 23)

9 Función cosecante

La correspondencia en $\mathbb{R} : x \longrightarrow y = \operatorname{cosec} x$ determina una función llamada función *cosecante* cuyo dominio es

$$\mathbb{R} - \{ \ldots -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots \}$$

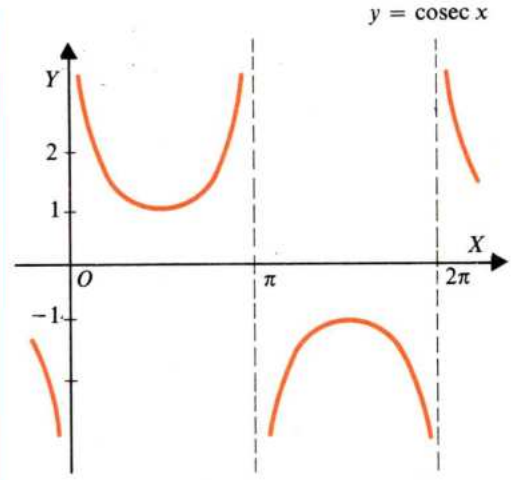
El estudio de esta función se puede hacer a partir del de la función *seno*, ya que $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$.

Se tiene para esta función:

a) Su conjunto imagen es $\mathbb{R} -]-1, 1[$.

b) Es periódica, con período 2π.

c) Su gráfica se denomina *cosecantoide* (Fig. 24).



(Fig. 24)

10 Función secante

La correspondencia en $\mathbb{R} : x \longrightarrow y = \sec x$ determina una función llamada función *secante* cuyo dominio es

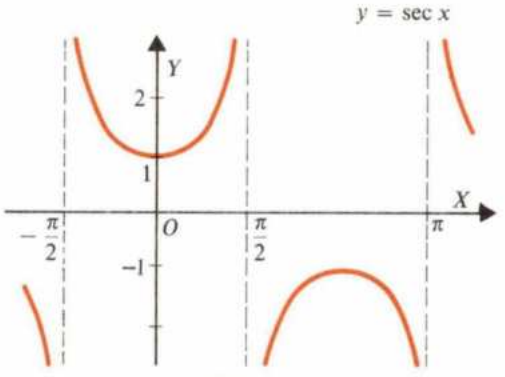
$$\mathbb{R} - \left\{\ldots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\right\}$$

Se tiene para esta función:

a) Su conjunto imagen es $\mathbb{R} -]-1, 1[$.

b) Es periódica, con período 2π.

c) Su gráfica se denomina *secantoide* (Fig. 25).



(Fig. 25)

11 Función cotangente

La correspondencia en $\mathbb{R} : x \longrightarrow \cot x$ determina una función llamada función *cotangente* cuyo dominio es

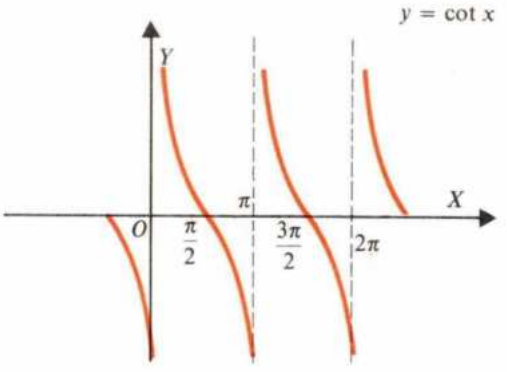
$$\mathbb{R} - \{\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots\}$$

Se tiene para esta función:

a) El conjunto imagen es $\mathbb{R}$.

b) Es periódica, de período π.

c) Su gráfica se llama *cotangentoide* (Fig. 26).



(Fig. 26)

12 Funciones trigonométricas recíprocas

Para cualquier número real x comprendido entre -1 y 1 se pueden encontrar infinitos números reales $y_1, y_2, y_3, \ldots$ que tengan por imagen mediante la función seno el número x dado.

Por tanto, la correspondencia recíproca o inversa de la función *seno*:

$$x \in [-1, 1] \longrightarrow y \quad \text{tal que sen } y = x$$

no es una función.

Veamos, sin embargo, cómo a partir de esta correspondencia se puede definir una función.

Supongamos dado un número real x arbitrario, pero perteneciente al intervalo $[-1, 1]$; la ecuación sen $y = x$ tiene, entonces, infinitas soluciones.

Ejemplo:

- Si $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \in [-1, 1]$, los números reales

$$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + 2\pi, \frac{\pi}{4} - 2\pi, \frac{\pi}{4} + 4\pi, \frac{\pi}{4} - 4\pi, \ldots$$

son soluciones de la ecuación sen $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

De las infinitas soluciones de la ecuación sen $y = x$, solamente una pertenece al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Esta solución se representa por $y = \text{arc sen } x$ o $y = \text{sen}^{-1} x$. Se lee: *y es igual al arco cuyo seno es x.* (Fig. 27.)

Ejemplo:

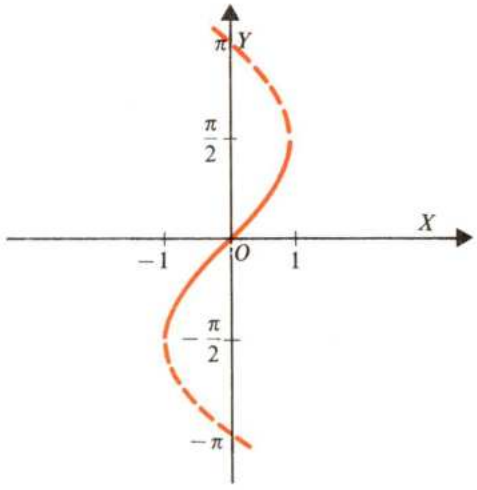
- Si $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, la única solución de sen $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ que pertenece al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ es $\frac{\pi}{4}$.

Tenemos, de esta forma, la siguiente función definida en el intervalo $[-1, 1]$:

$$x \longrightarrow y = \text{arc sen } x \quad \text{o} \quad x \longrightarrow y = \text{sen}^{-1} x$$

llamada función *arco seno.*

De análoga manera se definen las demás funciones recíprocas. Interesa únicamente resaltar cómo se selecciona una única imagen para cada x perteneciente al dominio de la función.



(Fig. 27)

13. Halla el valor de:

a) arc sen $\frac{1}{2}$

b) arc sen $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c) arc sen 1

d) arc sen (-1)

Arco coseno: $[-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$

$x \longrightarrow y = \text{arc cos } x = \cos^{-1} x$ (Fig. 28)

$0 \leqslant \text{arc cos } x \leqslant \pi$

Arco tangente: $\mathbb{R} \longrightarrow \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

$x \longrightarrow y = \text{arc tg } x = \text{tg}^{-1} x$ (Fig. 29)

$\dfrac{-\pi}{2} < \text{arc tg } x < \dfrac{\pi}{2}$

Arco cotangente: $\mathbb{R} \longrightarrow]0, \pi[$

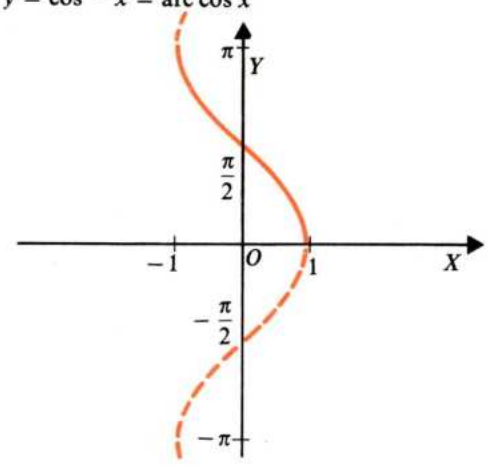
$x \longrightarrow y = \text{arc cot } x = \text{cot}^{-1} x$ (Fig. 30)

$0 < \text{arc cot } x < \pi$

Arco cosecante: $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\longrightarrow \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ (Fig. 31)

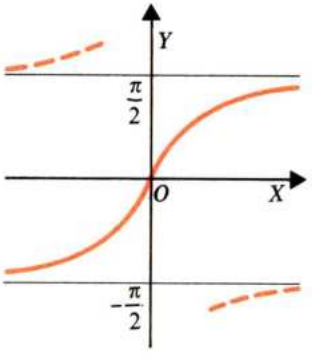
$x \longrightarrow y = \text{arc cosec } x = \text{cosec}^{-1} x$

$y = \cos^{-1} x = \text{arc cos } x$



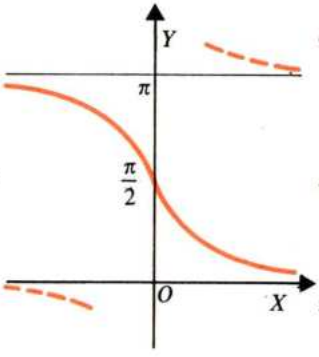
(Fig. 28)

$y = \text{tg}^{-1} x = \text{arc tg } x$



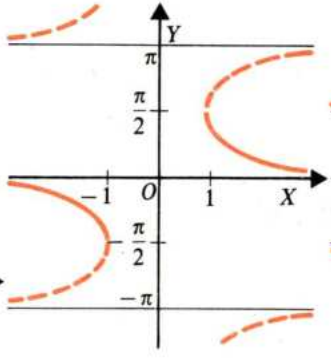
(Fig. 29)

$y = \text{cot}^{-1} x = \text{arc cot } x$



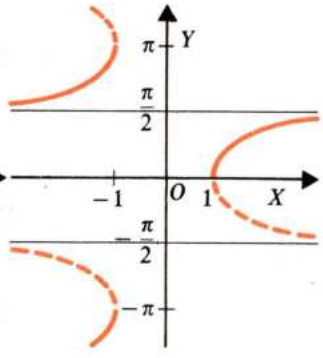
(Fig. 30)

$y = \text{arc cosec } x$



(Fig. 31)

$y = \sec^{-1} x$



(Fig. 32)

Si $x \geqslant 1$, entonces $0 < \text{arc cosec } x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

Si $x < -1$, entonces $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \text{arc cosec } x < 0$

Arco secante: $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\longrightarrow [0, \pi] - \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$

$x \longrightarrow y = \text{arc sec } x = \text{sec}^{-1} x$ (Fig. 32)

Si $x > 1$, entonces $0 \leqslant \text{arc sen } x < \dfrac{\pi}{2}$

Si $x < -1$, entonces $\dfrac{\pi}{2} < \text{arc sec } x < \pi$

14. Calcula los valores de:

a) arc tg $\sqrt{3}$

b) arc sec 2

c) arc cosec (-2)

13 Interpretación trigonométrica de la pendiente de una recta

Consideremos un sistema de ejes rectangulares y sea $\vec{v}(v_1, v_2)$ un vector de dirección de la recta r, (Fig. 33), y α el ángulo que forma el eje $X'X$ con $\vec{v}$; se tiene:

$$m = \frac{v_2}{v_1} = \operatorname{tg} \alpha$$

es decir:

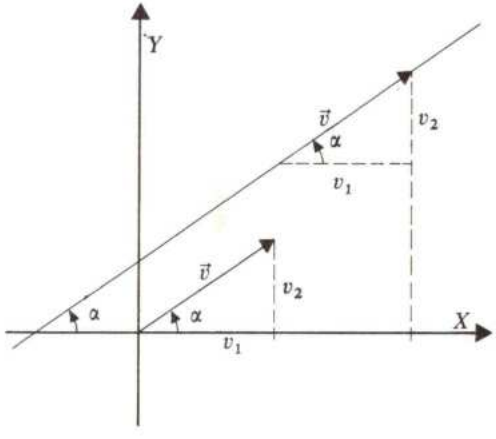
Cuando los ejes de coordenadas son rectangulares, la pendiente de una recta es la tangente trigonométrica del ángulo que forma el vector $\overrightarrow{OX}$ con el vector $\vec{v}$, o lo que es lo mismo, el eje $X'X$ con la recta r.

Ejemplo:

- La pendiente m_{AB} de la recta que pasa por los puntos $A(2, 1)$, $B(4, 3)$ es

$$m_{AB} = \frac{3 - 1}{4 - 2} = \frac{2}{2} = 1 = \operatorname{tg} \alpha$$

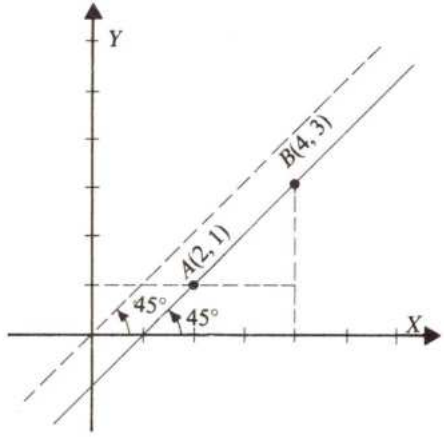
es decir: $\alpha = 45°$ (Fig. 34).



(Fig. 33)

La ecuación de la recta AB es

$$y - 1 = 1(x - 2) \Longrightarrow x - y - 1 = 0$$



(Fig. 34)

15. Halla la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

$$A(2, 2\sqrt{3}), \quad B(4, 2\sqrt{3} + 2)$$

Ejercicios y cuestiones

16. Calcula el complementario y el suplementario de los ángulos $\frac{\pi}{3}$ radianes y $\frac{3\pi}{10}$ radianes.

17. En una circunferencia de 16 m de radio, un arco mide 2 m. Halla su ángulo central correspondiente expresado en grados y en radianes.

18. Construye un ángulo de $\frac{\pi}{8}$ radianes.

19. ¿Puede haber algún ángulo α para el que se cumplan las igualdades: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}$. Justifica la respuesta.

20. ¿Puede haber algún ángulo α para el que se cumplan las igualdades: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}$, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$? Justifica la respuesta.

21. Simplifica las expresiones:

a) $\operatorname{sen}^3\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha$; b) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}$

22. Comprueba las siguientes igualdades:

a) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\cot\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha}$; b) $\dfrac{1-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha}$

23. Siendo α un ángulo del cuarto cuadrante tal que $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, determina las restantes razones trigonométricas de α.

24. ¿A qué cuadrantes tiene que pertenecer el ángulo α si $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$? Calcula las restantes razones trigonométricas haciendo un estudio separado de cada caso.

25. Expresa en función de $\operatorname{tg}\alpha$ las restantes razones trigonométricas del ángulo α.

26. Justifica por qué la función cosecante no alcanza ningún valor del intervalo $]-1, 1[$.

27. ¿Qué significado tiene la expresión $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arc\,cos}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$? Calcula su valor.

28. ¿Qué significado tiene la expresión $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$? Calcula su valor.

29. Calcula el valor de $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,sec} 2)$.

Tema 16 RESOLUCION DE TRIANGULOS RECTANGULOS

Se dedica la primera parte de este tema al estudio de las relaciones existentes entre las razones trigonométricas de dos ángulos que se encuentren en alguno de los siguientes casos: que sean suplementarios, que difieran en π radianes, que sumen 2π radianes o que sean complementarios. Este estudio nos permite reducir cualquier ángulo al primer cuadrante y es fundamental para una correcta utilización de las tablas naturales, que se presentan a continuación.

Finalmente se estudian algunas relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo, que se aplican después a los distintos casos de resolución de triángulos rectángulos.

1 Reducción al primer cuadrante

En este apartado estudiaremos cómo dado un ángulo α no perteneciente al primer cuadrante, se puede encontrar otro ángulo α_1 que sí pertenezca a dicho cuadrante y cuyas razones trigonométricas nos permitan obtener las del ángulo α. Diremos entonces que hemos reducido el ángulo α al primer cuadrante.

1.1. Sabemos que las funciones trigonométricas son periódicas y 2π es un período para todas ellas, es decir, que si k es entero,

$$\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen} x \qquad \operatorname{cosec}(x + 2k\pi) = \operatorname{cosec} x$$
$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \qquad \sec(x + 2k\pi) = \sec x$$
$$\operatorname{tg}(x + 2k\pi) = \operatorname{tg} x \qquad \cot(x + 2k\pi) = \cot x$$

Estas relaciones justifican que sólo consideremos ángulo el intervalo $[0, 2\pi]$, al que se podrá reducir cualquier ángulo dado.

Ejemplos:

- Para obtener las razones trigonométricas del ángulo de 33π radianes dividimos 33π por 2π, resultando un cociente entero 16. El resto de esta división es: $33\pi - 16 \cdot 2\pi = \pi$, luego las razones trigonométricas de los ángulos de $33\pi = 16 \cdot 2\pi + \pi$ y π radianes coinciden.
- Las razones trigonométricas del ángulo de 825° son iguales a las del ángulo de 105°, ya que al dividir 825 por 360 se tiene $825° = 2 \cdot 360° + 105°$.

Ejercicios:

1. Calcula las razones trigonométricas del ángulo de 390°.
2. Calcula las razones trigonométricas del ángulo de 420°.
3. Encuentra el ángulo cuya medida en radianes está comprendida entre 12π y 14π y tiene las mismas razones trigonométricas que el ángulo de $\frac{3\pi}{7}$ radianes.

1.2. Razones de ángulos suplementarios.

Sean QOP y QOP' dos ángulos suplementarios (Fig. 1). Los triángulos rectángulos OPQ y $OQ'P'$ son iguales por tener iguales un lado ($\overline{OP} = \overline{OP'}$) y un ángulo agudo ($QOP = P'OQ'$).

La igualdad de los ángulos se justifica por ser ambos suplementarios de QOP'.

Podemos entonces escribir: $\overline{OQ} = -\overline{OQ'}$ y $\overline{QP} = \overline{Q'P'}$.

Si las coordenadas de P son (x, y), por las igualdades anteriores las de P' serán $(-x, y)$.

Recordando las definiciones de las distintas razones trigonométricas (Fig. 1) se tiene:

$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = y = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -x = -\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = \frac{-x}{y} = -\frac{x}{y} = -\cot\alpha$$

$$\operatorname{cosec}(\pi - \alpha) = \frac{1}{y} = \operatorname{cosec}\alpha$$

$$\sec(\pi - \alpha) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -\sec\alpha$$

Las igualdades anteriores se pueden resumir diciendo:

Dos ángulos suplementarios tienen senos y cosecantes iguales, y opuestas las demás razones.

Las relaciones estudiadas permiten reducir al primer cuadrante ángulos del segundo.

Ejemplo:

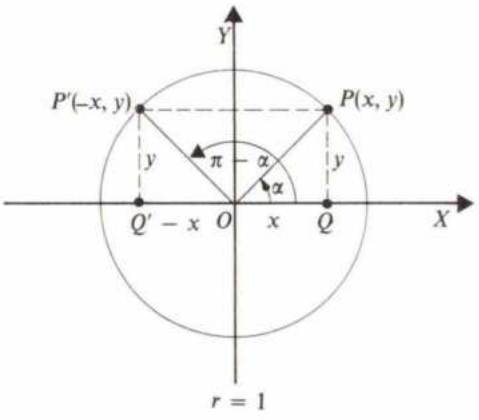
- Para obtener las razones trigonométricas del ángulo de 145°, como está en el segundo cuadrante tendríamos que hallar su suplementario, que es el ángulo de 35°, pues $180° - 145° = 35°$.

  Se tiene entonces:

  $\operatorname{sen} 145° = \operatorname{sen} 35°$ $\qquad$ $\operatorname{cosec} 145° = \operatorname{cosec} 35°$

  $\cos 145° = -\cos 35°$ $\qquad$ $\sec 145° = -\sec 35°$

  $\operatorname{tg} 145° = -\operatorname{tg} 35°$ $\qquad$ $\cot 145° = -\cot 35°$



(Fig. 1)

4. Calcula el seno, coseno y tangente del ángulo de $\frac{3\pi}{4}$ radianes.

5. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos de 1.920° y 150°.

1.3. Razones de ángulos que difieren en π radianes.

Sean QOP y QOP' dos ángulos que difieren en π radianes (Fig. 2).

Los triángulos rectángulos OQP y $OQ'P'$ son iguales por tener iguales un lado ($\overline{OP} = \overline{OP'}$) y un ángulo agudo ($QOP = Q'OP'$).

Esta última igualdad está justificada por diferir cada uno de ellos en π radianes del ángulo QOP'. De esta igualdad de triángulos resulta:

$$-\overline{OQ} = \overline{OQ'} \quad \text{y} \quad \overline{QP} = \overline{Q'P'}$$

Si (x, y) son las coordenadas del punto P, las del punto P' serán $(-x, -y)$, y se tiene:

$$\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -y = -\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -x = -\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y} = \cot\alpha$$

$$\operatorname{cosec}(\pi + \alpha) = \frac{1}{-y} = -\frac{1}{y} = -\operatorname{cosec}\alpha$$

$$\sec(\pi + \alpha) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -\sec\alpha$$

Las igualdades anteriores se pueden resumir diciendo:

Dos ángulos que difieren en π radianes tienen tangentes y cotangentes iguales, y opuestas las demás razones.

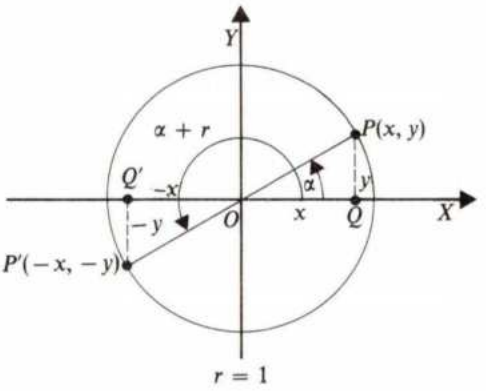
Estas relaciones permiten reducir al primer cuadrante los ángulos del tercer cuadrante.

Ejemplo:

- Para obtener las razones trigonométricas del ángulo de 243°27′ buscamos uno del primer cuadrante que difiere del dado en 180°.

  Este ángulo es el de 243°27′ − 180° = 63°27′. Por las igualdades demostradas, se tiene:

$$\operatorname{sen}\,243°27' = -\operatorname{sen}\,63°27'$$
$$\cos\,243°27' = -\cos\,63°27'$$
$$\operatorname{tg}\,243°27' = \operatorname{tg}\,63°27'$$
$$\operatorname{cosec}\,243°27' = -\operatorname{cosec}\,63°27'$$
$$\sec\,243°27' = -\sec\,63°27'$$
$$\cot\,243°27' = \cot\,63°27'$$



(Fig. 2)

6. Calcula las razones trigonométricas del ángulo de $\frac{5\pi}{4}$ radianes.

7. Halla el seno, coseno y tangente del ángulo de 240°.

8. ¿Cómo están relacionadas las razones trigonométricas de los ángulos de 95° y 275°? Escríbelas.

9. En el razonamiento seguido para obtener las relaciones entre las razones trigonométricas de dos ángulos, α y $\alpha + \pi$, utilizamos una figura en la que α pertenecía al primer cuadrante. Demuestra que las relaciones se mantienen cuando α es un ángulo del segundo cuadrante.

1.4. Razones de ángulos que suman 2π radianes.

Sean QOP y QOP' dos ángulos que sumen 2π radianes (Fig. 3). Los ángulos QOP y $P'OQ$ son iguales, pues la suma de cada uno de ellos con QOP' es de 2π radianes. Luego los triángulos OQP y OQP' son iguales por tener iguales dos lados y el ángulo comprendido. Por tanto, si las coordenadas de P son (x, y), las de P' serán $(x, -y)$, y se tienen, (Fig. 3), las siguientes relaciones:

$$\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -y = -\operatorname{sen}\alpha$$

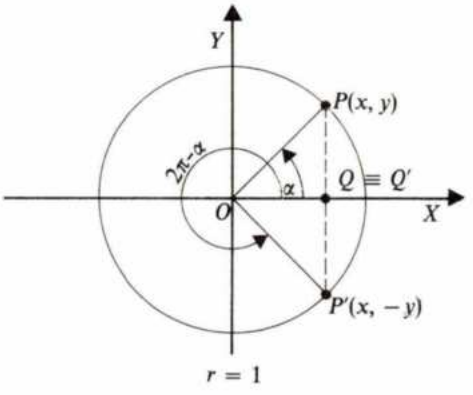
$$\cos(2\pi - \alpha) = x = \cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{cot}(2\pi - \alpha) = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\operatorname{cot}\alpha$$

$$\operatorname{cosec}(2\pi - \alpha) = \frac{1}{-y} = -\frac{1}{y} = -\operatorname{cosec}\alpha$$

$$\sec(2\pi - \alpha) = \frac{1}{x} = \sec\alpha$$



(Fig. 3)

Lo que se resume diciendo:

Dos ángulos que sumen 2π radianes tienen los cosenos y las secantes iguales, y opuestas las demás razones.

Las relaciones estudiadas permiten reducir al primer cuadrante los ángulos del cuarto cuadrante.

Ejemplos:

- Para calcular el seno del ángulo de $\frac{4\pi}{3}$ radianes habrá que hallar otro ángulo que sumado con éste nos dé 2π radianes. Efectuando operaciones se tiene:

$$2\pi - \frac{4\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi \Longrightarrow \frac{4\pi}{3} = 2\pi - \frac{2}{3}\pi$$

Luego $\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$.

- Calculemos el seno y el coseno de $330°$.

$$\operatorname{sen} 330° = \operatorname{sen}(360° - 30°) = -\operatorname{sen} 30° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 330° = \cos(360° - 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

10. Calcula el seno del ángulo de $\frac{7\pi}{4}$ radianes.

11. Calcula las razones trigonométricas del ángulo de $300°$.

12. Escribe las relaciones que encuentres en las razones trigonométricas de los ángulos $2\pi - \alpha$ y α.

1.5. Razones de ángulos complementarios.

Sean QOP y $Q'OP'$ dos ángulos complementarios (Fig. 4).

Los triángulos rectángulos OQP y $OQ'P'$ son iguales por tener iguales un lado ($\overline{OP} = \overline{OP'}$) y un ángulo agudo ($Q'OP' = OPQ$), ya que ambos son complementarios del ángulo QOP.

Por ser iguales los triángulos OQP y $OQ'P'$, se tiene:

$$\overline{QP} = \overline{OQ'} \quad \text{y} \quad \overline{Q'P'} = \overline{OQ}$$

Si (x, y) son las coordenadas de P, las de P' serán (y, x).

Se tienen las siguientes relaciones:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = x = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = y = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{x}{y} = \cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{x} = \sec\alpha$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{y} = \operatorname{cosec}\alpha$$

Estas relaciones permiten obtener las razones trigonométricas de cualquier ángulo del primer cuadrante conociendo únicamente las de los ángulos menores de 45°, puesto que si dos ángulos son complementarios, uno de ellos es menor de 45°, salvo que los dos sean iguales.

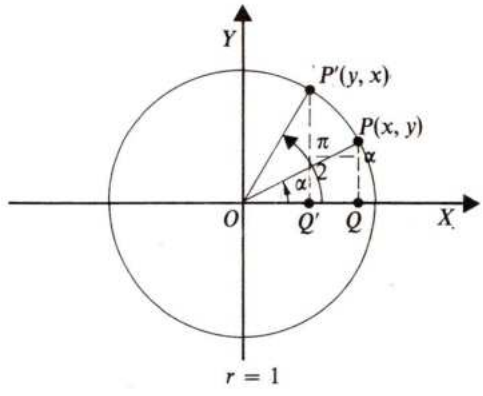
Ejemplo:

- Las razones trigonométricas del ángulo de 60° se pueden obtener a partir de las del de 30°. Por las relaciones estudiadas, tenemos:

$$\operatorname{sen}(90° - 30°) = \operatorname{sen} 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(90° - 30°) = \cos 60° = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}(90° - 30°) = \operatorname{tg} 60° = \cot 30° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$



(Fig. 4)

13. ¿Cómo están relacionadas las razones trigonométricas de los ángulos de 250° y 340°? Escribe las relaciones que encuentres.

Sugerencia: Reduce los dos ángulos al primer cuadrante.

14. ¿Qué razón trigonométrica del ángulo de $\frac{\pi}{5}$ radianes tiene el valor $\cos\frac{3\pi}{10}$?

15. Sabiendo que α es un ángulo del primer cuadrante y que $\cos\alpha = \frac{2}{5}$, calcula $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ y $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

16. Si B y C son los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, ¿cuánto vale la suma

$$\operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C?$$

2 Tablas naturales. Interpolación

2.1. Los valores aproximados de las razones trigonométricas de ciertos ángulos vienen calculados y dispuestos ordenadamente en las llamadas tablas naturales.

La aproximación de las tablas que se usan en este libro es de cuatro cifras decimales, para ángulos de 0° a 90°, de 10 en 10 minutos. (Ver tablas del final del libro.)

Ejemplo:

- Sabemos que $\operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y que este número es irracional.

  La aproximación decimal que nos dan las tablas es $\operatorname{sen} 45° = 0{,}7071$.

Si bien las tablas naturales solamente traen calculadas las razones de ángulos de 0° a 90°, se pueden calcular las de cualquier otro ángulo reduciéndolo al primer cuadrante.

Ejemplo:

- Para obtener $\operatorname{sen} 130°$ buscamos en las tablas seno 50°, ya que $\operatorname{sen} 130° = \operatorname{sen}(180° - 130°) = \operatorname{sen} 50°$.

Las tablas naturales resuelven fundamentalmente dos problemas:

a) *problema directo:* obtención de todas o alguna de las razones trigonométricas de un ángulo dado.

b) *problema inverso:* encontrar un ángulo conociendo el valor de una de sus razones trigonométricas y sabiendo en qué cuadrante se encuentra.

2.2. Problema directo.

Si pretendemos hallar la razón trigonométrica de un ángulo dado, puede ocurrir que el ángulo sea de los calculados en las tablas, en cuyo caso se leerá directamente.

Ejemplos:

- Para hallar $\operatorname{tg} 40°40'$ se lee directamente en las tablas:

$$\operatorname{tg} 40°40' = 0{,}8591$$

- Para hallar cos 39°10′ leemos en las tablas:

$$\cos 39°10' = 0{,}7753$$

Cuando el ángulo dado no figure en las tablas, podemos tomar como valores aproximados de sus razones trigonométricas las del ángulo más próximo que las tenga calculadas. Para una mejor aproximación se puede utilizar el procedimiento denominado de *interpolación*. Este procedimiento se utiliza en el ejemplo siguiente:

Ejemplo:

- Para hallar sen 25°33′ se calcula la diferencia sen 25°40′ − − sen 25°30′; los ángulos de 25°40′ y 25°30′ son los más próximos al dado respectivamente por exceso y defecto que figuran en las tablas. A esta diferencia se le denomina diferencia tabular. Su valor es:

$$\begin{array}{r} \text{sen } 25°40' = 0{,}4331 \\ \text{sen } 25°30' = 0{,}4305 \\ \hline \text{diferencia tabular} = 0{,}0026 \end{array}$$

La diferencia tabular 0,0026 corresponde a una diferencia de 10′.

Como el ángulo dado excede en 3′ al más próximo por defecto, planteamos la siguiente proporción:

a 10′ corresponde una diferencia tabular 0,0026
a 3′ corresponde una diferencia tabular x

$$x = \frac{3 \cdot 0{,}0026}{10} = \frac{0{,}0078}{10} = 0{,}00078$$

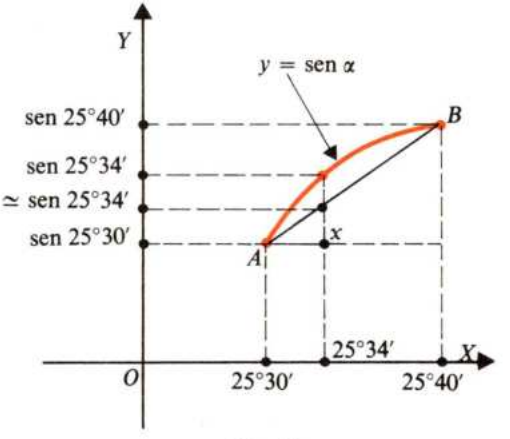
Con un valor aproximado de cuatro cifras decimales, $x = 0{,}0008$.

Luego $\text{sen } 25°34' = \text{sen } 25°30' + x = 0{,}4305 + 0{,}0008 = 0{,}4313$.

Se suma la parte proporcional x, porque la función *seno* es creciente para ángulos del primer cuadrante.

Hemos sustituido el arco AB (Fig. 5) de la gráfica de la función *seno* por su cuerda. Observa que debido a esta sustitución se comete un error.

Nota: El valor 0,0008 obtenido aquí mediante una proporción se puede leer directamente en la tabla de senos naturales del final del libro. En las diferencias tabulares, al valor 3′ correspondiente a la fila donde se encuentra sen 25°30′ le corresponde 8, que se añade a la última cifra de 0,4305.



(Fig. 5)

17. Calcula utilizando tablas naturales:

a) sen 83°40′

b) cos 35°50′

c) tg 145°3′

d) cos 243°33′

e) sec 225°63′

f) tg 315°42′

Ejemplos:

- Vamos a calcular sen 35°36′ con ayuda de las tablas.

  Se tiene sen 35°30′ = 0,5807.

  En las tablillas laterales al 6 le corresponde el valor 14, que se añadirá a las dos últimas cifras del valor anterior, luego sen 35°36′ = 0,5807 + 14 = 0,5821.

- Para hallar cos 57°44′ se calcula la diferencia tabular:

$$\begin{array}{r} \cos 57°40' = 0{,}5348 \\ \cos 57°50' = 0{,}5324 \\ \hline \text{diferencia tabular} = 0{,}0024 \end{array}$$

  Parte proporcional a 57°44′ − 57°40′ = 4′

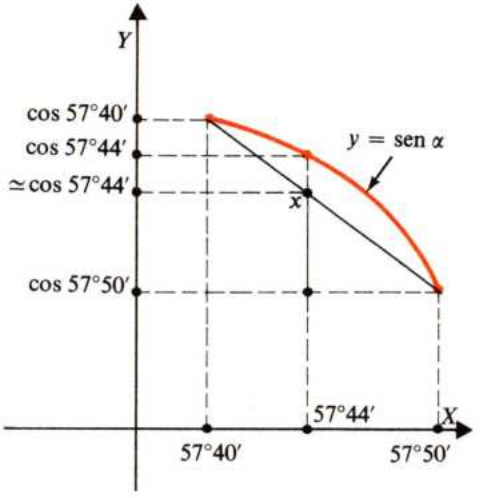
$$\left.\begin{array}{l} 10 \longrightarrow 0{,}0024 \\ 4 \longrightarrow \quad x \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{4 \times 0{,}0024}{10} = 0{,}00096$$

  Si consideramos solamente cuatro cifras decimales, tenemos el siguiente valor aproximado: $x = 0{,}0010$.

Como la función *coseno* es decreciente para ángulos del primer cuadrante, el valor de x (Fig. 6) debemos restárselo a cos 57°40′:

$$\cos 57°44' = 0{,}5348 - 0{,}0010 = 0{,}5338$$

Este resultado se puede obtener directamente, sin necesidad de los cálculos anteriores, mirando en las diferencias tabulares de la tabla de cosenos naturales del final del libro, de modo análogo a como se hizo con el seno.



(Fig. 6)

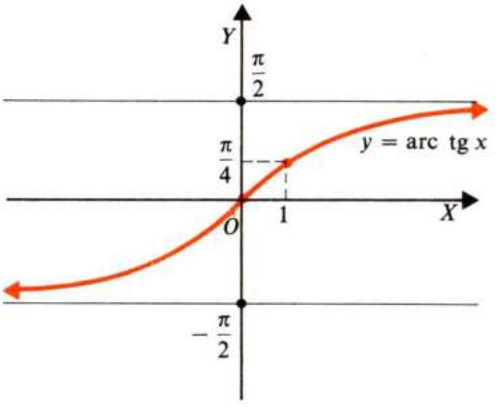
2.3. Problema inverso.

Conocido el valor de una razón de un ángulo, y sabiendo en qué cuadrante está, es posible determinar éste. Si el valor que nos dan figura en las tablas, el ángulo se lee directamente.

Ejemplos:

- Si sabemos que tg $C = 1$ y que $0 < C < \frac{\pi}{2}$, podemos buscar el valor 1 en las tablas, en donde se podrá ver que corresponde al ángulo de 45° ó $\frac{\pi}{4}$ radianes. Este resultado lo podemos expresar gráficamente (Fig. 7). Si no se añade $0 < C < \frac{\pi}{2}$, hay más soluciones.

- En las tablas se puede ver que el ángulo que tiene por imagen mediante la función seno el valor 0,8923 es el de 63°10′.



(Fig. 7)

2.4. Los números decimales que figuran en las tablas son positivos por ser imágenes de ángulos del primer cuadrante mediante las distintas funciones trigonométricas. Por eso, no podemos encontrar directamente el ángulo que corresponde a un valor negativo de una razón trigonométrica dada.

En tales casos se empieza calculando el ángulo que corresponde al número opuesto del dado. El ángulo pedido se obtiene aplicando las relaciones entre ángulos suplementarios, ángulos que difieren en π radianes, etc. Cada caso nos sugerirá el empleo de alguno de ellos.

Ejemplo:

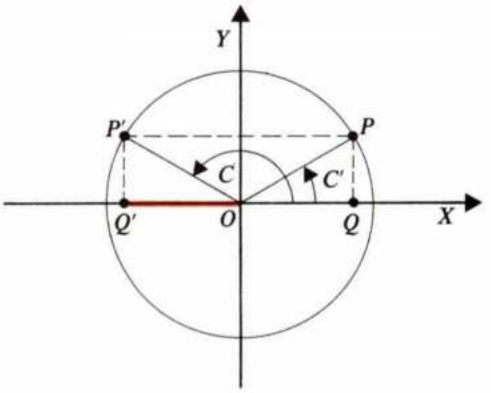
- Para hallar el ángulo del segundo cuadrante tal que $\cos C = -0{,}8816$ empezamos obteniendo el ángulo C' tal que $\cos C' = 0{,}8816$. Las tablas nos dan: $C = 28°10'$.

  Como dos ángulos suplementarios tienen cosenos opuestos (Fig. 8), es decir, $\overline{OQ'} = -\overline{OQ}$, se tiene:

  $$\cos C = \cos(180° - C') = -\cos C' = -0{,}8816$$

  Luego

  $$C = 180° - C' = 151°50'$$



(Fig. 8)

2.5. Si el valor de la razón trigonométrica dada no figura en las tablas, se hace una interpolación. Tendremos así un resultado aproximado.

Ejemplo:

- Leyendo las tablas no podemos obtener el ángulo C del primer cuadrante tal que $\text{sen } C = 0{,}4234$, pero encontramos los números 0,4226 y 0,4253 que se aproximan más al dado, uno por defecto y el otro por exceso, siendo:

  $$0{,}4226 = \text{sen } 25°0'$$
  $$0{,}4253 = \text{sen } 25°10'$$

  La diferencia tabular es $0{,}4253 - 0{,}4226 = 0{,}0027$.

  Obtenemos ahora la parte proporcional a $0{,}4234 - 0{,}4226 = 0{,}0008$

  $$\begin{array}{l} 0{,}0027 \longrightarrow 10 \\ 0{,}0008 \longrightarrow x \end{array} \qquad x = \frac{8 \cdot 10}{27}$$

  que nos da un valor aproximado $x = 3'$.

  Luego $C = 25°3'$

18. El valor del coseno de un ángulo del cuarto cuadrante es 0,4695. Halla el ángulo.

19. La tangente de un ángulo α del cuarto cuadrante vale $-1{,}7543$. Halla el ángulo.

20. Resuelve las ecuaciones:

a) $\text{sen } x = 0{,}3983$

b) $\cos x = 0{,}3543$

c) $\text{tg } x = 1{,}3471$

21. Calcula:

a) arc tg 0,4314

b) arc tg $-$ 2,7475

c) arc sen 0,9572

d) arc sen $-(0{,}7092)$

3 Resolución de triángulos rectángulos

3.1. Sea ABC un triángulo rectángulo y A su ángulo recto (Fig. 9). Llamaremos *elementos* del triángulo ABC a los lados a, b, c y a sus ángulos opuestos A, B y C.

Diremos que los ángulos B y C son *dependientes* porque satisfacen la siguiente igualdad: $B + C = 90$.

También los lados diremos que son *dependientes*, pues por el teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$

Vamos a obtener ahora otras relaciones entre los elementos de un triángulo rectángulo a partir de las definiciones de las razones trigonométricas, para lo cual consideramos el triángulo rectángulo ABC (Fig. 9). Se tiene:

$$\operatorname{sen} C = \frac{c}{a} \Longrightarrow c = a \operatorname{sen} C \qquad \cos C = \frac{b}{a} \Longrightarrow b = a \cos C$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{c}{b} \Longrightarrow c = b \operatorname{tg} C \qquad \operatorname{cot} C = \frac{b}{c} \Longrightarrow b = c \operatorname{cot} C$$

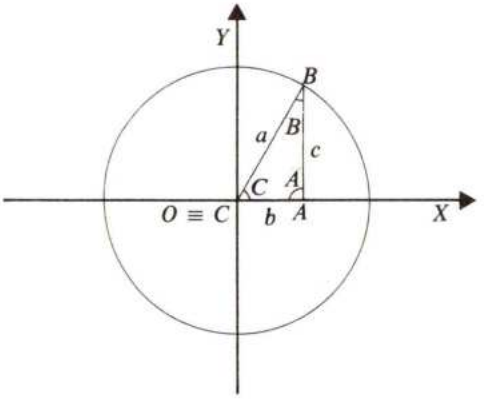
Las cuatro igualdades anteriores se pueden expresar así:

a) *Un cateto es igual al producto de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto a dicho cateto.*

b) *Un cateto es igual al producto de la hipotenusa por el coseno del ángulo adyacente a dicho cateto.*

c) *Un cateto es igual al producto del otro cateto por la tangente del ángulo opuesto al primero.*

d) *Un cateto es igual al producto del otro cateto por la cotangente del ángulo adyacente al primero.*



(Fig. 9)

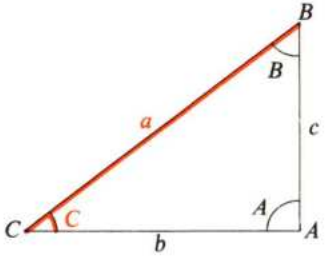
3.2. De los seis elementos, a, b, c, A, B y C, de un triángulo rectángulo ABC el ángulo recto A siempre es conocido.

Resolver el triángulo rectángulo significa calcular los cinco elementos restantes conociendo dos de ellos que sean independientes.

Según cuáles sean los datos se pueden distinguir los cuatro casos siguientes, que se resuelven aplicando las relaciones obtenidas en el apartado **3.1.**

3.3. 1.er caso: *Conocido un ángulo agudo y la hipotenusa.*

Supongamos que del triángulo rectángulo ABC (Fig. 10) conocemos la hipotenusa a y el ángulo agudo C.



(Fig. 10)

A continuación se indica cómo se calculan los restantes elementos del triángulo:

$$B = 90° - C; \quad b = a \cos C; \quad c = a \operatorname{sen} C$$

Ejemplo:

- Vamos a resolver un triángulo rectángulo ABC con los siguientes datos:

  hipotenusa $a = 72{,}5$m y $C = 35°10'$

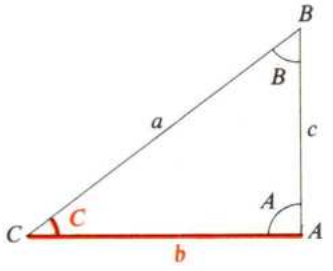
$$B = 90° - 35°10' = 54°50'$$

$$b = a \cos C = 72{,}5 \cos 35°10' \simeq 72{,}5 \cdot 0{,}8175 \simeq 59{,}3 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow b = 59{,}3 \text{ m}$$

$$c = a \operatorname{sen} C = 72{,}5 \operatorname{sen} 35°10' \simeq 72{,}5 \cdot 0{,}5760 \simeq 41{,}8 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow c = 41{,}8 \text{ m}$$

3.4. 2.º caso: *Conocido un cateto y un ángulo agudo.*

Supongamos que del triángulo ABC (Fig. 11) se conocen el cateto b y el ángulo C.



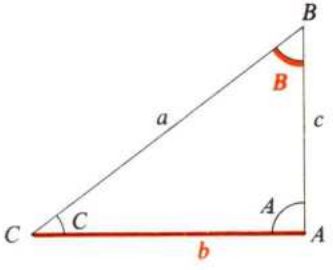
(Fig. 11)

A continuación se indica cómo se calculan los restantes elementos del triángulo:

$$B = 90° - C \qquad c = b \operatorname{tg} C$$

$$a = \frac{b}{\cos C}, \quad \text{puesto que } \cos C = \frac{b}{a}$$

Aunque es totalmente análogo, estudiaremos la resolución cuando los datos son el cateto b y el ángulo opuesto B (Fig. 12) mediante dos procedimientos:



(Fig. 12)

1.er *Procedimiento*	2.º *Procedimiento*
$C = 90° - B$	$C = 90° - B$
$c = b \operatorname{tg} C$	$c = b \cot B$
$a = \dfrac{b}{\cos C}$	$a = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B}$

Observa que para calcular c y a en el 2.º procedimiento se utilizan solamente los datos b y B, mientras que en el primero se utiliza el ángulo C que no es un dato del problema. ¿Con cuál de los dos procedimientos hay menos riesgo de error?

Ejemplos:

- Veamos cómo se resuelve el triángulo rectángulo ABC cuyos datos son:

$$C = 58°40' \quad \text{y} \quad b = 38{,}6 \text{ m}$$

$$B = 90° - 58°40' = 31°20'$$

$$c = b \operatorname{tg} C = 38{,}6 \operatorname{tg} 58°40' \simeq 38{,}6 \cdot 1{,}6426 \simeq 63{,}4 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow c \simeq 63{,}4 \text{ m}$$

$$a = \frac{b}{\cos C} = \frac{38{,}6}{\cos 58°40'} \simeq 74{,}2 \Longrightarrow a \simeq 74{,}2 \text{ m}$$

22. Resuelve un triángulo rectángulo ABC del que se conocen:

$C = 35°40'$ y la hipotenusa $a = 44{,}3$ m

23. El cateto c de un triángulo rectángulo ABC mide 65 cm y el ángulo agudo $B = 38°23'$. Calcula la hipotenusa y el otro cateto.

24. De un triángulo rectángulo se conoce un ángulo agudo, que mide $28°45'$, y su cateto opuesto, que mide 35,6 cm. Resuelve el triángulo.

- Análogamente el triángulo rectángulo ABC cuyos datos son $B = 32°10'$ y $b = 75{,}4$ m se resuelve como sigue:

$$C = 90° - 32°10' = 57°50'$$

$$c = b \cot B = 75{,}4 \cot 32°10' \simeq 75{,}4 \cdot 1{,}5900 \simeq 120 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow c \simeq 120 \text{ m}$$

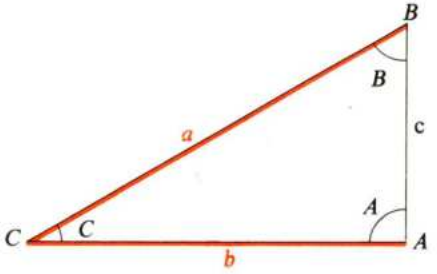
$$a = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{75{,}4}{\text{sen } 32°10'} \simeq \frac{75{,}4}{0{,}5324} \simeq 142 \Longrightarrow a \simeq 142 \text{ m}$$

3.5. 3.er caso: *Conocida la hipotenusa y un cateto.*

Supongamos conocidos el cateto b y la hipotenusa a del triángulo ABC (Fig. 13).

$$\cos C = \frac{b}{a}\ ; \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2}\ ; \qquad B = 90° - C$$

Aunque B se podría calcular a partir de $\text{sen } B = \frac{b}{a}$, lo hemos calculado de la forma indicada para mayor sencillez.



(Fig. 13)

Ejemplo:

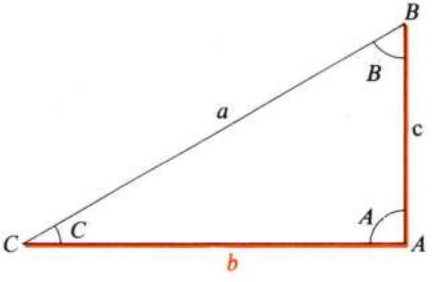
- Vamos a resolver un triángulo rectángulo ABC del que se conocen la hipotenusa $a = 32$ m y un cateto $b = 16$ m.

$$\cos C = \frac{b}{a} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \qquad C = \text{arc cos } \frac{1}{2} = 60°$$

$$B = 90° - 60° = 30° \qquad c = \sqrt{32^2 - 16^2} \simeq 27{,}7$$

3.6. 4.º caso: *Conocidos los catetos b y c.* (Fig. 14).

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} \qquad \text{tg } C = \frac{c}{b} \qquad B = 90° - C \quad \text{o} \quad \text{tg } B = \frac{b}{c}$$



(Fig. 14)

Ejemplo:

- Veamos cómo se resuelve un triángulo rectángulo ABC del que se conocen dos catetos, $b = 25{,}4$ y $c = 38{,}2$:

$$a = \sqrt{(25{,}4)^2 + (38{,}2)^2} \simeq 46{,}9$$

$$\text{tg } C = \frac{c}{b} = \frac{38{,}2}{25{,}4} \simeq 1{,}5039 \Longrightarrow C \simeq \text{arc tg } 1{,}5039 \simeq 56°23'$$

$$\text{tg } B = \frac{b}{c} = \frac{25{,}4}{38{,}2} \simeq 0{,}6649 \Longrightarrow B = \text{arc tg } 0{,}6649 \simeq 33°37'$$

25. Resuelve un triángulo rectángulo con los datos: un cateto mide 8 cm, y la hipotenusa, 12.

26. Los dos catetos de un triángulo rectángulo miden 5 cm y 12 cm. Resuelve el triángulo.

Ejercicios y cuestiones

27. Calcula, sin utilizar tablas, las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

a) 2.655°; b) 1.230°; e) 945°

28. De las siguientes igualdades, ¿cuáles son verdaderas y cuáles falsas?

$$\operatorname{tag}(\pi - \alpha) = \operatorname{tag}\alpha$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$

29. Calcula, sin consultar las tablas, las razones trigonométricas del ángulo 3.825°.

30. En un terreno horizontal se ve una torre desde un punto A bajo un ángulo de 30°. Aproximándose a la torre 20 m, llegamos a otro punto B, alineado con el punto A y el pie de la torre, desde el cual se ve ésta bajo un ángulo de 45°. Calcula la altura de la torre.

31. El cateto b de un triángulo rectángulo ABC mide 70 cm y la bisectriz del ángulo agudo C mide 85 cm. Resuelve el triángulo.

32. Si los ángulos agudos de un triángulo rectángulo miden 30° y 60°, la hipotenusa es el doble de un cateto. Demuéstralo.

33. Los lados de un triángulo equilátero miden 15,6 cm. Halla su área.

34. En un triángulo isósceles el ángulo que determinan los lados iguales mide 53°75′, y el lado opuesto, 60 m. Calcula su área.

35. Calcula utilizando las tablas:

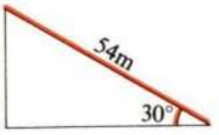
a) sen 3.675°27′

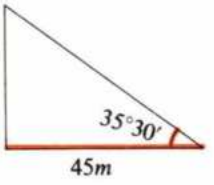
b) cos 3.723°30′

c) arc cos (−0,9436)

d) arc sen (−0,9436)

36. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos:





Tema 17 LAS FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARITMICA

Se define en primer lugar la función exponencial de exponente racional, estableciéndose sus propiedades. Las demostraciones de estas propiedades, cuando el exponente es real, se salen de los límites de este curso. Se define después la función logarítmica como recíproca de la exponencial y se estudian sus propiedades.

1 Potencia de exponente racional

1.1. Sean a un número real positivo $a > 0$ y $\frac{m}{n}$ una fracción en la que $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n > 0$.

Se define la potencia de exponente fraccionario del modo siguiente:

Si $m > 0$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Como $a > 0$ y $m \in \mathbb{Z}$, es $a^m > 0$. Se puede probar que $\sqrt[n]{a^m}$ existe y que entre sus valores hay uno positivo.

$$\text{Por convenio } \begin{cases} a^0 = 1 \\ a^1 = a \end{cases}$$

Si m es un entero negativo, haciendo $m = -m'$, donde m' es un entero positivo, resulta:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{-m'}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m'}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^{m'}}}$$

Ejemplos:

- $2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$; $9^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{9^7}$; $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$
- $4^{\frac{-1}{5}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{4}}$; $8^{\frac{-4}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^4}}$

Ejercicios:

1. Escribe en forma radical las siguientes potencias:

a) $3^{\frac{4}{5}}$; b) $2^{\frac{5}{3}}$

c) $2^{\frac{-1}{4}}$; d) $2^{\frac{3}{4}}$

1.2. Sea el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales considerado como grupo aditivo y el de los números reales positivos como grupo multiplicativo; entre los grupos $(\mathbb{Q}, +)$ y $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ definimos la correspondencia f_a, llamada *potencia de exponente racional de base a*, $f_a : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ del modo siguiente:

$$f_a\left(\frac{m}{n}\right) = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad \text{donde } m,\ n \in \mathbb{Z},\ \text{con } n > 0$$

Como un número racional es un conjunto de fracciones equivalentes, veamos que la potencia de exponente racional no depende de la fracción que se elija de dicho conjunto.

Sean $\frac{p}{q}$ y $\frac{m}{n}$ dos fracciones equivalentes, esto quiere decir que $p \cdot n = q \cdot m$. Tenemos que demostrar que $a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}}$; para ello sustituimos p por su igual $\frac{q \cdot m}{n}$ en el primer miembro, es decir:

$$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{\frac{q \cdot m}{n}}{q}} = a^{\frac{q \cdot m}{n \cdot q}}$$

Como $q \neq 0$, se puede simplificar y queda:

$$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}}$$

1.3. *Propiedades.*

Sean a y b números reales positivos y $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$ fracciones con n y q positivos. Se verifican las siguientes propiedades:

a) $(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$

b) $(a : b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}}$

c) $(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}$

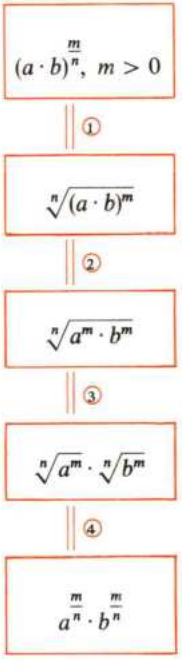
d) $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$

e) $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}$

En el margen se encuentra el esquema de la demostración de la propiedad a) para el caso de que $m > 0$.

En ① y ④ se ha aplicado la definición **1.1.**, en ③ se ha tenido en cuenta el producto de radicales del mismo índice.

¿Qué propiedad de las potencias de exponente entero se ha aplicado en ②?

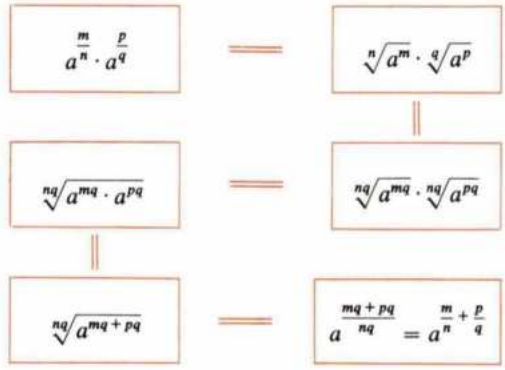


Si m es negativo, hacemos $m = -m'$, con $m' > 0$, y se tiene:

$$(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{-m'}{n}} = \frac{1}{(a \cdot b)^{\frac{m'}{n}}} = \frac{1}{a^{\frac{m'}{n}} \cdot b^{\frac{m'}{n}}} =$$

$$= \frac{1}{a^{\frac{m'}{n}}} \cdot \frac{1}{b^{\frac{m'}{n}}} = a^{\frac{-m'}{n}} \cdot b^{\frac{-m'}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$$

También se encuentra al margen el esquema de la demostración de la propiedad d); el alumno debe razonar los pasos de dicha demostración.



2 Variación de las potencias de exponente racional

2.1. Sea $a \in \mathbb{R}_+$ y $a > 1$.

Multiplicando los dos miembros de $a > 1$ por a, resulta $a^2 > a > 1$.

Análogamente, de las desigualdades anteriores se obtiene, multiplicando por a,

$$a^3 > a^2 > a > 1$$

En general, para todo entero $n > 0$ se tiene:

$$a^n > a^{n-1} > \cdots > a^2 > a > 1$$

Por tanto:

$$(a > 1 \text{ y } n > 0) \Longrightarrow a^n > 1$$

2.2. Si $n < 0$, será $n = -p$ con $p > 0$, $p \in \mathbb{Z}$, entonces $a^n = a^{-p} = \frac{1}{a^p}$. Como $a^p > 1$, se sigue que $\frac{1}{a^p} < 1$, luego

$$(a > 1 \text{ y } n < 0) \Longrightarrow a^n < 1$$

2.3. Si $0 < a < 1$ y $n > 0$, $n \in \mathbb{Z}$, entonces $a^n < 1$.

Si $0 < a < 1$, será $a = \frac{1}{b}$, donde $b > 1$, y se tiene $a^n = \frac{1}{b^n}$.

Como por **2.1.** es $b^n > 1$, será $\frac{1}{b^n} < 1$; luego $a^n < 1$.

2.4. Sea de nuevo un número real $a > 1$. Si n y m son dos números enteros positivos y $m > n$, entonces $a^m > a^n$.

Siendo $m = n + p (p > 0)$, se tiene por **2.1.** que

$$a^p > 1 \Longrightarrow a^n \cdot a^p > a^n \Longrightarrow a^{n+p} > a^n \Longrightarrow a^m > a^n$$

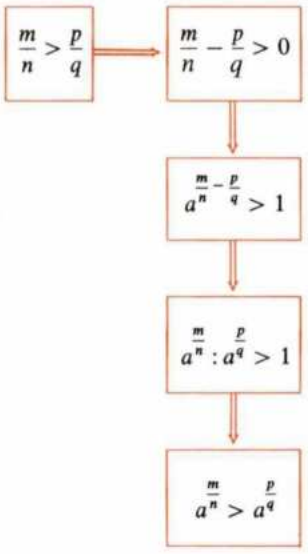
2.5. Consideremos la potencia $a^{\frac{m}{n}}$ con $a > 1$ y $\frac{m}{n} > 0$.

Designemos por r esta potencia: $a^{\frac{m}{n}} = r$. Elevando a n los dos miembros se tiene $a^m = r^n$. Como $a^m > 1$, será $r^n > 1$, de donde $r > 1$; es decir: $\left(a > 1 \text{ y } \frac{m}{n} > 0\right) \Longrightarrow a^{\frac{m}{n}} > 1$.

También se puede probar $\left(a > 1 \text{ y } \frac{m}{n} < 0\right) \Longrightarrow a^{\frac{m}{n}} < 1$

2.6. Si $a > 1$ y $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, entonces $a^{\frac{m}{n}} > a^{\frac{p}{q}}$

El esquema del margen demuestra esta propiedad.



2.7. Si $0 < a < 1$, se pueden probar las siguientes propiedades:

a) $\left(0 < a < 1 \text{ y } \frac{m}{n} > 0\right) \Longrightarrow a^{\frac{m}{n}} < 1$

b) $\left(0 < a < 1 \text{ y } \frac{m}{n} < 0\right) \Longrightarrow a^{\frac{m}{n}} > 1$

c) $\left(0 < a < 1 \text{ y } \frac{m}{n} > \frac{p}{q}\right) \Longrightarrow a^{\frac{m}{n}} < a^{\frac{p}{q}}$

3 Potencia de exponente real

3.1. Para comprender el significado de una potencia de exponente irracional consideremos la potencia $3^{\sqrt{2}}$. Como $\sqrt{2} = 1{,}4142...$, las sucesiones decimales por defecto y por exceso correspondientes son

$$\sqrt{2} = \begin{cases} 1 < 1{,}4 < 1{,}41 < 1{,}414 < 1{,}4142 < \cdots \\ 2 > 1{,}5 > 1{,}42 > 1{,}415 > 1{,}4143 > \cdots \end{cases}$$

2. Prueba que si $n > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ y $r^n > 1$, entonces $r > 1$. (Indicación: si fuese $r \leqslant 1$, ¿qué contradición se seguiría?)

Elevando 3 a los términos de estas sucesiones resulta:

$$① \quad 3^1 < 3^{1,4} < 3^{1,41} < 3^{1,414} < 3^{1,4142} < \dots$$

$$② \quad 3^2 > 3^{1,5} > 3^{1,42} > 3^{1,415} > 3^{1,4143} > \dots$$

Las sucesiones anteriores cumplen las siguientes propiedades:

a) La sucesión ① es creciente y la ② es decreciente.

b) Todo término de la primera es menor que todo término de la segunda.

c) Las diferencias entre los términos correspondientes de ambas sucesiones forman una sucesión nula.

Las propiedades a) y b) son evidentes; en cuanto a la c), la sucesión de diferencias es:

$$3^2 - 3^1,\ 3^{1,5} - 3^{1,4},\ 3^{1,42} - 3^{1,41},\ 3^{1,415} - 3^{1,414},$$
$$3^{1,4143} - 3^{1,4142},\ \dots$$

que se puede escribir:

$$3 \cdot (3 - 1),\ 3^{1,4}(3^{0,1} - 1),\ 3^{1,41}(3^{0,01} - 1),$$
$$3^{1,414}(3^{0,001} - 1),\ 3^{1,4142}(3^{0,0001} - 1) \dots$$

En esta última sucesión, cada término se encuentra descompuesto en dos factores, uno de ellos es siempre inferior a 9, ya que el exponente de 3 no llega nunca a valer 2.

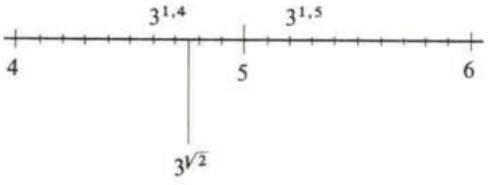
Los segundos factores forman una sucesión nula, ya que el término general de dicha sucesión es $(3^{10^{-(n-1)}} - 1)$ y por tanto $\lim_{n\to\infty} (3^{10^{-(n-1)}} - 1) = 3^{\lim_{n\to\infty} 10^{-(n-1)}} - 1 = 3^0 - 1 = 1 - 1 = 0.$

Se tiene así que la última sucesión es el producto de dos sucesiones, una acotada y otra nula, luego su producto es una sucesión nula.

En el cálculo del último límite se ha utilizado la siguiente propiedad que no demostraremos: si $a \in \mathbb{R}$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, se verifica $\lim_{n\to\infty} a^{bn} = a^b$.

De lo anterior se sigue que las sucesiones ① y ② son un par de sucesiones monótonas contiguas y tienen por tanto el mismo límite, este límite es por definición $3^{\sqrt{2}}$. Puede demostrarse, aunque no lo haremos, que, en general, al elevar un número real positivo dado a un exponente real cualquiera se obtiene un nuevo número real, que es siempre positivo.

Representando dichas sucesiones por puntos de una recta, existirá un solo punto que las separará, y la abcisa de ese punto es el número real $3^{\sqrt{2}}$ (Fig. 1)



(Fig. 1)

En general, si x es un número real arbitrario, existe un par de sucesiones monótonas contiguas (b_n) y (c_n) tales que

$$x = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n$$

y se tienen otras dos sucesiones monótonas contiguas (a^{b_n}) y (a^{c_n}); ambas sucesiones definen un número real tal que

$$\lim_{n\to\infty} a^{b_n} = \lim_{n\to\infty} a^{c_n} = a^x$$

3.2. En la potencia de exponente real se verifican las mismas propiedades que cuando el exponente es racional (Ver **2.2.**), pero la demostración de estas propiedades corresponde a cursos superiores.

4 Función exponencial de exponente real

4.1. Sea a un número real positivo y consideremos la aplicación $F_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F_a(x) = a^x$, $a > 0$; dicha aplicación se llama *la función exponencial de base a.*

La función f está definida en todo $\mathbb{R}$, y su recorrido son los números reales estrictamente positivos.

4.2. Sean $a, x, y \in \mathbb{R}$; se verifican las siguientes propiedades:

a) $(a > 1 \text{ y } x > 0) \Longrightarrow a^x > 1$

b) $(a > 1 \text{ y } x < 0) \Longrightarrow a^x < 1$

c) $(a > 1 \text{ y } x > y) \Longrightarrow a^x > a^y$

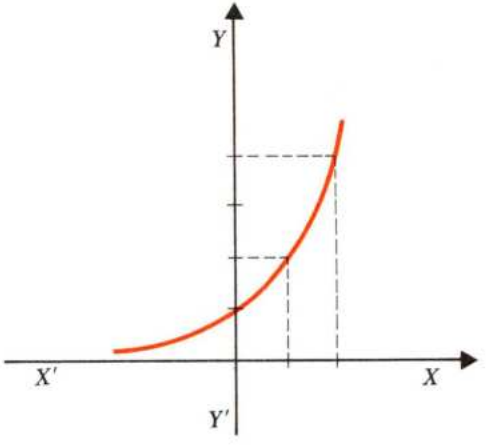
d) $(0 < a < 1 \text{ y } x > 0) \Longrightarrow a^x < 1$

e) $(0 < a < 1 \text{ y } x < 0) \Longrightarrow a^x > 1$

f) $(0 < a < 1 \text{ y } x > y) \Longrightarrow a^x < a^y$

La propiedad c) se expresa diciendo que la función exponencial de base $a > 1$ es una función *estrictamente creciente* en todo $\mathbb{R}$. Análogamente, la propiedad f) expresa que la función exponencial de base $a < 1$ es una función *estrictamente decreciente en todo* $\mathbb{R}$.

La función exponencial $y = 2^x$ se ha representado en la figura 2, con ayuda de la tabla del margen.



(Fig. 2)

x	0	1	2	-1	-2	...
y	1	2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	...

3. Haz una tabla de valores y representa la función $y = 3^x$.

5 La función $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Interés continuo

5.1. La función $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ definida en $\mathbb{R}_+$ tiene por límite e cuando $x \longrightarrow \infty$.

Se sabe que, todo número real positivo x está comprendido entre dos números naturales consecutivos

$$n \leqslant x \leqslant n+1 \Longrightarrow \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}$$

y por tanto $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leqslant \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

En esta desigualdad los términos primero y tercero son sucesiones, mientras que el segundo es una función. Aunque no lo demostraremos, se sigue verificando en este caso la propiedad **3.5.** del tema 9; es decir: el paso al límite conserva las desigualdades, luego, como

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e, \text{ será } \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = e.$$

También se verifica que $\lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Ejemplo:

- $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{5}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^x$; haciendo $\frac{x}{5} = h$, se tiene:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^x = \lim_{h\to\infty}\left(1 + \frac{1}{h}\right)^{5h} \overset{①}{=} \left[\lim_{h\to\infty}\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h\right]^5 = e^5$$

En el paso ① se ha aplicado la siguiente propiedad:

Si f es una función y $k \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)]^k = [\lim_{x\to\infty} f(x)]^k$$

4. Calcula:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$; b) $\lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{5}{x}\right)^x$

Ejemplo:

- $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2}\right)^{x^2+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x^2}\right)^{x^2+3} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x^2}\right)^{x^2}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x^2}\right)^{3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x^2}\right)^{x^2}\cdot 1 =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{4}}\right)^{x^2}$$

Haciendo $\frac{x^2}{4} = h$, se tiene:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{4}}\right)^{x^2} = \lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^{4h} = \left[\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^{h}\right]^4 = e^4$$

5. Calcula $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+6}{x^2}\right)^{x^2+1}$

6. Calcula $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x}$

5.2. *Interés continuo.*

Recordemos que en la fórmula del interés compuesto

$$C = c(1+r)^t$$

C es el capital final, c el inicial, r el tanto por uno o cantidad que produce 1 peseta en 1 año y t el número de años.

Si 1 peseta produce r pesetas en 1 año, en $\frac{1}{m}$ de año producirá $\frac{r}{m}$, es decir: $\frac{r}{m}$ es el tanto por uno cuando los intereses se acumulan cada $\frac{1}{m}$ de año, y como hay m períodos de capitalización $\frac{1}{m}$ en un año, en t años habrá mt veces $\frac{1}{m}$ de año. Por tanto, el capital c al cabo de t años se convierte en

$$C = c\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}$$

Si $m = 12$, resulta la fórmula del interés compuesto cuando los intereses se acumulan al capital cada mes:

$$C = c\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12t}$$

Si $m = 360$, se obtiene $C = c\left(1+\frac{r}{360}\right)^{360t}$

Cuando el número de partes $m \longrightarrow \infty$, el interés se llama continuo, y se tiene:

$$C = \lim_{m\to\infty} c\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} = c\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{mt}$$

Haciendo $\frac{m}{r} = n$, resulta:

$$c \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{mt} = c\cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nrt} = c\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{rt} = c\cdot e^{rt}$$

$$C = c\cdot e^{rt}$$

Ejemplo:

- Veamos lo que produce 1 peseta a interés continuo al 100 por 100 anual en un 1 año.

$$C = c\cdot e^{rt} = 1\cdot e^{1\cdot 1} = e = 2{,}718\ldots \text{ pesetas}$$

7. Calcula lo que producen 1.000 pesetas a interés continuo al 20 por 100 anual en 1 año.

6 Definición de logaritmo: Propiedades

6.1. El logaritmo de un número $y > 0$ en una base dada $a > 0$ es el número x a que debe elevarse a para obtener y. Se denota: $\log_a y = x$, y se lee: el logaritmo de y en base a es igual a x.

Admitiremos que todo número real positivo tiene logaritmo, es decir:

$$\forall\, y\in\mathbb{R}_+, \quad \exists\, x\in\mathbb{R} \quad \text{tal que } a^x = y$$

Ejemplos:

- $\log_2 16 = 4$ porque $2^4 = 16$
- $\log_3 81 = 4$ porque $3^4 = 81$
- De las siguientes igualdades en forma exponencial

$$3^2 = 9, \quad 10^{-2} = 0{,}01, \quad 4^3 = 64$$

se obtienen las siguientes igualdades en forma logarítmica:

$$\log_3 9 = 2, \quad \log_{10} 0{,}01 = -2, \quad \log_4 64 = 3$$

- Calculemos $\log_8 4$. Llamaremos $x = \log_8 4$, entonces por definición

$$8^x = 4 \Longrightarrow (2^3)^x = 2^2 \Longrightarrow 2^{3x} = 2^2 \Longrightarrow 3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}; \quad \text{luego} \quad \log_8 4 = \frac{2}{3}$$

6.2. Las cuatro propiedades siguientes son inmediatas:

a) $\log_a a = 1$, ya que $a^1 = a$
b) $\log_a 1 = 0$, ya que $a^0 = 1$
c) $\log_a a^x = x$, ya que $a^x = a^x$
d) $a^{\log_a x} = x$, ya que $\log_a x = \log_a x$

Ejemplos:

- $\log_2 2 = 1$, $\log_3 3 = 1$
- $\log_2 1 = 0$, $\log_{10} 1 = 0$
- $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$
- $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$

6.3. Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$, se verifica: $\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

Sean:

$$\left.\begin{matrix} p = \log_a x_1 \\ q = \log_a x_2 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = a^p \\ x_2 = a_q \end{cases}$$

Multiplicando las igualdades anteriores, se tiene: $x_1 x_2 = a^{p+q}$

entonces $\log_a (x_1 x_2) = \log_a a^{p+q} = p + q = \log_a x_1 + \log_a x_2$.

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

Ejemplos:

- $\log_{10} 100 \cdot 10 = \log_{10} 100 + \log_{10} 10 = \log_{10} 10^2 + 1 = 2 + 1 = 3$
- $\log_5 5^2 \cdot 5^4 = \log_5 5^2 + \log_5 5^4 = 2 + 4 = 6$

6.4. Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$, se tiene: $\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$

Llamemos $p = \log_a x_1 \Longrightarrow x_1 = a^p$

$q = \log_a x_2 \Longrightarrow x_2 = a^q$

Dividiendo las dos igualdades anteriores, resulta:

$\dfrac{x_1}{x_2} = a^{p-q}$, luego $\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a a^{p-q} = p - q = \log_a x_1 - \log_a x_2$

El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos del dividendo y del divisor.

8. Escribe una igualdad logarítmica de cada una de las siguientes igualdades exponenciales:

a) $2^7 = 128$
b) $2^5 = 32$
c) $5^3 = 125$

9. Aplica la propiedad c) de **6.2.** para calcular:

a) $\log_5 5^3$; b) $\log_6 6^2$;
c) $\log_5 25$; d) $\log_3 9$;
e) $\log_b b^3$; f) $\log_b b^n$.

10. De cada una de las propiedades a), b) y c) de **6.2.** da un enunciado.

11. Calcula, como en los ejemplos de **6.1.** y **6.2.**

a) $\log_2 4$; b) $\log_4 2$; c) $\log_3 81$;
d) $\log_5 125$; e) $\log_{\frac{1}{5}} 5$.

Ejemplo:

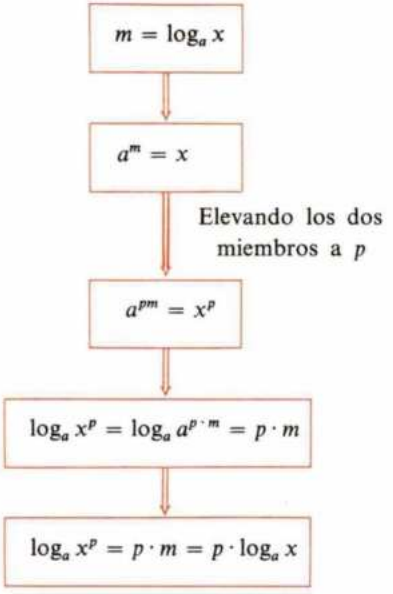
- Si $\log_2 N = 7$ y $\log_2 P = 3$, entonces

$$\log_2 \frac{N}{P} = \log_2 N - \log_2 P = 7 - 3 = 4$$

6.5. Sea $x \in \mathbb{R}_+$ y $p \in \mathbb{R}$; se verifica: $\log_a x^p = p \log_a x$

El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base.

Razona cada uno de los pasos de la demostración de esta propiedad que se encuentra en el margen.



Como consecuencia de esta propiedad se obtiene el logaritmo de una raíz:

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a x$$

El logaritmo de una raíz se obtiene dividiendo el logaritmo del radicando por el índice.

Ejemplos:

- Vamos a calcular $\log_4 64$

$$\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3 \log_4 4 = 3 \cdot 1 = 3$$

- Sabiendo que $\log_{10} 2 = 0{,}3010$, calculemos $\log_{10} \sqrt[3]{16}$

$$\log_{10} \sqrt[3]{16} = \frac{1}{3} \log_{10} 16 = \frac{1}{3} \log_{10} 2^4 = \frac{1}{3} 4 \log_{10} 2 =$$

$$= \frac{4}{3} 0{,}3010 = \frac{1{,}2040}{3} = 0{,}4013$$

12. Si $\log_3 N = 4$ y $\log_3 P = -1$, calcula

$$\log_3 N \cdot P$$

13. Si $\log_2 N = 12$, calcula:

a) $\log_2 N^3$

b) $\log_2 \sqrt[4]{N}$

7 Función logarítmica: Propiedades

7.1. Se ha visto en el apartado anterior que la función exponencial es estrictamente creciente si $a > 1$, y estrictamente decreciente si $a < 1$; entonces aplicando el teorema **4.3.** del tema 12 se deduce que la función exponencial también es inyectiva.

En el apartado **6** hemos admitido que todo número real positivo $y \in \mathbb{R}_+$ tiene logaritmo, lo que significa que todo $y \in \mathbb{R}_+$ se puede escribir en la forma a^x, lo que por otra parte quiere decir que la función exponencial $F_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ es suprayectiva; como también es inyectiva, resulta que:

$F_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ es biyectiva y en consecuencia existe la aplicación recíproca o inversa $F_a^{-1} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que a $a^x \in \mathbb{R}_+$ le asocia $x \in \mathbb{R}$, es decir: $F_a^{-1}(a^x) = x$.

Esta función recíproca o inversa de la exponencial de base a se llama *función logarítmica* y se denota por $\log_a$. Hallar la imagen de $y \in \mathbb{R}_+$ mediante la aplicación $\log_a : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es lo mismo que hallar el logaritmo de y en base a.

$$y \longrightarrow \log_a y$$

Ejemplo:

- Las imágenes de 2, 4, 8, 16 y $\frac{1}{2}$, mediante la función logarítmica $\log_2 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, son: $\log_2 2 = 1$, $\log_2 4 = 2$, $\log_2 8 = 3$, $\log_2 16 = 4$, $\log_2 \frac{1}{2} = -1$.

Además de las propiedades de los logaritmos que se pueden considerar también como propiedades de la función logarítmica, se verifican las siguientes propiedades:

7.2. La función logarítmica $\log_a : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es biyectiva.

$\log_a x_1 = \log_a x_2 = y \Longrightarrow a^y = x_1 = x_2$; luego es inyectiva.

Dado $y \in \mathbb{R}$, existe a^y y se verifica que $\log_a a^y = y$, luego $\log_a$ es suprayectiva; al ser inyectiva y suprayectiva, la función logarítmica es biyectiva.

7.3. La función logarítmica es estrictamente creciente si $a > 1$.

Sea $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$

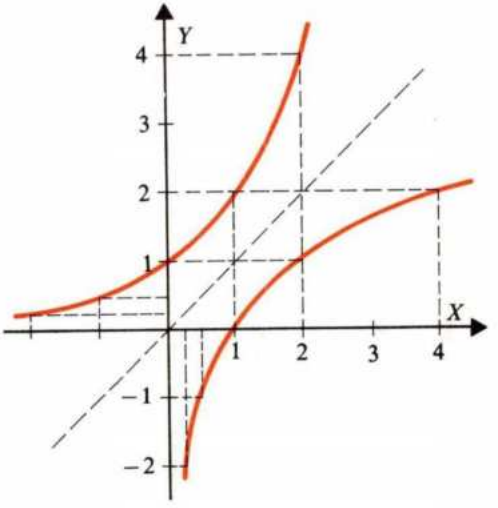
Si $x_1 = a^h$ y $x_2 = a^p$, entonces $x_1 > x_2 \Rightarrow a^h > a^p \Rightarrow h > p$.

Como $h = \log_a x_1$ y $p = \log_a x_2$, se tiene:

$x_1 > x_2 \Longrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$, lo que nos dice que la función $y = \log_a x$ es estrictamente creciente en el intervalo $]-\infty, +\infty[$.

Del mismo modo se prueba que si $0 < a < 1$, la función logarítmica es estrictamente decreciente en todo $\mathbb{R}_+$.

7.4. Como la función logarítmica $y = \log_a x$ y la exponencial $a^x = y$ son recíprocas, se tiene que la gráfica de la primera es simétrica de la gráfica de la función exponencial respecto de la bisectriz del primer cuadrante. En la figura 3 aparece la gráfica de la función $y = \log_2 x$.



(Fig. 3)

x	1	2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
y	0	1	2	-1	-2

8 Logaritmos decimales

8.1. La función $\log_{10} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada $N \in \mathbb{R}_+$ le asocia $\log_{10} N : N \longrightarrow \log_{10} N$ se llama *función logarítmica decimal.*

Decir que $\log_{10} N$ vale h significa que $10^h = N$

$$\log_{10} N = h \Longleftrightarrow 10^h = N$$

Los logaritmos de base 10 se llaman logaritmos decimales y en la práctica son los que más se usan.

El logaritmo decimal del número N se escribe $\log N$, en lugar de $\log_{10} N$.

Ejemplos:

- $\log 1 = 0$; • $\log 10 = 1$; • $\log 100 = \log 10^2 = 2$
- $\log 1.000 = \log 10^3 = 3$
- $\log 0{,}1 = \log \frac{1}{10} = \log 10^{-1} = -1$
- $\log 0{,}01 = \log \frac{1}{100} = \log 10^{-2} = -2$
- $\log \sqrt{10} = \log 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

En estos ejemplos se observa que si un número N es una potencia de 10, su logaritmo decimal es el exponente de 10.

$$N = 10^h \Longrightarrow \log N = \log 10^h = h$$

En particular, las potencias enteras de 10 tienen por logaritmos números enteros.

8.2. Como la función logarítmica es estrictamente creciente si la base $a > 1$, se tiene que:

Si $10 < x < 100$, entonces $\log 10 < \log x < \log 100$, es decir:

$$10 < x < 100 \Longrightarrow \log x < 2$$

Esto significa que los números comprendidos entre 10 y 100 tienen por logaritmo un número decimal comprendido entre 1 y 2.

8.3. Análogamente:

si $100 < x < 1.000$, entonces, $\log 100 < \log x < \log 1.000$, es decir: $100 < x < 1.000 \Longrightarrow 2 < \log x < 3$

Los números comprendidos entre 100 y 1.000 tienen por logaritmo un número decimal comprendido entre 2 y 3.

8.4. Se llama *característica* de un número real α al mayor número entero a que es menor o igual que dicho número.

Ejemplo:

-

Número α	*Característica* a
3,27	3
−5,74	−6
−1	−1

Se llama *mantisa* de un número real α al número que se obtiene restando de α su característica a.

$$\text{Mantisa} = \alpha - a$$

Ejemplo:

-

Número α	*Mantisa* $= \alpha - a$
3,27	$3{,}27 - 3 = 0{,}27$
−5,74	$-5{,}74 - (-6) = -5{,}74 + 6 = 0{,}26$
−1	$-1 \quad -(-1) = 0$

Como el logaritmo de un número N es un número real, tiene sentido hablar de la característica y de la mantisa de $\log N$.

Si $\log N = 2{,}3456$, entonces 2 es la característica y 0,3456 es la mantisa.

8.5. Vamos a asociar al logaritmo de un número su característica: $\log x \longrightarrow$ característica de $\log x = c(\log x)$

Ejemplos:

- Si $x = 28$, como $10 < 28 < 100$, es $1 < \log 28 < 2$, luego $c(\log 28) = 1$.
- Si $x = 375$, como $100 < 375 < 1.000$, se tiene $2 < \log 375 < 3$, luego $c(\log 375) = 2$.

Si $x \in \mathbb{R}_+$ tiene n cifras enteras, se verifica $10^{n-1} < x < 10^n$, entonces $n - 1 < \log x < N$ y $c(\log x) = n - 1$.

14. Halla:

a) $\log 10.000$

b) $\log 100.000$

c) $\log 10^6$

d) $\log 0{,}001$

e) $\log 0{,}0001$

15. Comprueba que si $10^4 < x < 10^5$, entonces $4 < \log x < 5$.

16. ¿Por qué la mantisa del logaritmo de un número no puede ser negativa?

17. Cuál es la característica del logaritmo de los siguientes números:

a) 2; b) 35; c) 463;

d) 5.428; e) 56.375.

De lo dicho resulta la siguiente regla:

La característica del logaritmo de un número mayor que 1 *es igual al número de sus cifras disminuido en una unidad.*

8.6. Consideremos ahora números positivos menores que 1. Sea un número x tal que $0{,}1 < x < 1$, es decir: $10^{-1} < x < 10^{0}$, entonces $\log 10^{-1} < \log x < \log 10^{0}$, luego $-1 < \log x < 0$.

Esta desigualdad indica que $\log x$ se puede expresar en la forma:

$$\log x = -1 + 0'abcd\ldots, \qquad \text{donde } 0'a, b, c, d, \ldots$$

representa un número decimal menor que 1. En consecuencia, la característica de $\log x$ es: $c(\log x) = -1$.

La característica de los logaritmos de los números menores que 1 y mayores que 0,1 es -1. Así:

$$c(\log 0{,}25) = -1, \quad c(\log 0{,}12) = -1$$

Si $10^{-2} < x < 10^{-1}$, es $-2 < \log x < -1$ y la característica será $c(\log x) = -2$.

La característica de los logaritmos de los números comprendidos entre 0,1 *y* 0,01 *es* -2.

$$c(\log 0{,}051) = -2; \quad c(\log 0{,}04329) = -2$$

En general, el logaritmo de un número menor que 1 *es negativo, y la característica negativa es igual al número de ceros que preceden a la primera cifra significativa contando el cero anterior a la coma.*

En efecto, si el número x tiene r ceros, incluyendo el cero anterior a la coma, será:

$$10^{-r} < x < 10^{-(r-1)}$$

Como la función logarítmica es creciente, será:

$-r < \log x < -(r-1)$, por tanto

$-r$ es la característica de $\log x$.

8.7. Las mantisas de los logaritmos de los números se encuentran ordenadas en las llamadas *tablas de logaritmos*. Según el número de cifras decimales de las mantisas, las tablas de logaritmos son de cuatro, cinco, seis, etc., decimales.

Al final del libro aparecen unas tablas de cuatro decimales.

18. ¿Entre qué dos potencias sucesivas de 10 se encuentra 0,0081? ¿Cuál será, por tanto, la característica de log 0,0081?

19. Indica la característica de los logaritmos de los siguientes números:

a) 0,5; b) 0,34; c) 0,041.

Dos números distintos pueden tener logaritmos con la misma mantisa, es decir:

Si un número A se multiplica o se divide por una potencia entera de 10, la mantisa de su logaritmo no varía.

$$\text{mantisa de } \log A = \text{mantisa de } \log (A \cdot 10^n)$$

En efecto, sea $\log A = E, abcd...$; entonces se tiene:

$$\log (A \cdot 10^n) = \log A + \log 10^n = n + \log A = n + E, abcd...$$

Al sumar el entero n con el decimal $E, abcd...$ resulta el decimal $(E + n), abcd...$ que tiene $E + n$ de parte entera conservando la misma parte decimal.

Ejemplo:

- Si $\log 4 = 0{,}6021$, resulta que:

  $\log 40 = 1{,}6021$, $\log 400 = 2{,}6021$, $\log 4.000 = 3{,}6021$

20. Sabiendo que $\log 2 = 0{,}3010$, calcula:

a) $\log 20$; b) $\log 200$

c) $\log 2.000$; d) $\log 20.000$.

9 Manejo de las tablas

9.1. En primer lugar vamos a explicar cómo se busca en las tablas del final del libro el logaritmo de un número de tres cifras. Sea éste 427.

Las dos primeras cifras del número 427, es decir, el número 42, se buscan en la primera columna de la izquierda; la tercera cifra, 7, en la primera fila de arriba. En la intersección de estas líneas se encuentra la mantisa del log 427, que es 6304, así que $\log 427 = 2{,}6304$.

Aunque las mantisas son decimales, en las tablas se omite la coma por comodidad.

9.2. Si se trata de un número entero de una o dos cifras, la mantisa de su logaritmo se halla con la regla anterior, ya que podemos imaginar que las últimas cifras son ceros, pues, según sabemos, la mantisa no se altera al multiplicar o dividir por una potencia entera de 10.

Ejemplos:

- mantisa del log 8 = mantisa del log 80 = 9031, luego $\log 8 = 0{,}9031$; $\log 80 = 1{,}9031$,

- En la columna del cero se lee directamente la mantisa del logaritmo de 39; $\log 39 = 1{,}5911$.

9.3. Consideremos ahora el número 4.275, de cuatro cifras.

Se busca la mantisa de 427 como se dijo en **9.1.**, después en las tablillas de diferencias de la derecha se mira el número situado en la intersección de la columna encabezada por la cifra 5 con la fila donde está log 427; el número encontrado se debe sumar a la mantisa del log 427 para tener log 4.275.

$$\begin{aligned} \text{mantisa del } \log 427 &= 0{,}6304 \\ \text{corrección por } 5 &= \quad\ 5 \\ \hline \text{mantisa del } \log 4.275 &= 0{,}6309 \end{aligned}$$

luego $\log 4.275 = 3{,}6309$.

Las tablas del final del libro sólo dan los logaritmos de los números menores o iguales a 10.000.

9.4. *Problema inverso.* Veamos cómo se procede para encontrar un número x, conocido $\log x$.

Sea $\log x = 1{,}8998$. En las tablas se lee directamente esta mantisa que corresponde a los números 794, 7.940, 79,4, 7,94, 0,794, etc.; como la característica es 1, se tiene que $x = 79{,}4$.

Sea ahora $\log x = 1{,}8164$. En este caso la mantisa no se encuentra en la tabla; la que más se aproxima a ella por defecto es 8162, que corresponde al número 655. En la misma fila donde se encuentra la mantisa anterior se puede ver que a la diferencia $2 = 8164 - 8162$ le corresponde 3. Como la característica es 1, el número debe tener dos cifras enteras, luego $x = 65{,}53$.

Este número x se llama *antilogaritmo* de $\log x = 1{,}8998$.

21. Busca en las tablas del final del libro los logaritmos de los siguientes números:

a) log 347; b) log 849

c) log 64; d) log 72

e) log 574; f) log 725

g) log 8.341; h) log 7.341

22. Calcula $\sqrt[5]{875}$ con ayuda de las tablas.

Indicación: Calcula $\log \sqrt[5]{875} = \dfrac{\log 875}{5}$ y busca en las tablas el antilogaritmo del logaritmo anterior.

10 Cologaritmo

Se llama *cologaritmo* de un número x, y se escribe $\operatorname{colog}_a x$, a $-\log_a x$

$$\operatorname{colog}_a x = -\log_a x$$

Ejemplos:

- $\operatorname{Colog}_2 8 = -\log_2 8 = -3$
- $\operatorname{Colog}_2 16 = -\log_2 16 = -4$
- Como $\log 764 = 2{,}8831$, se tiene que $\operatorname{colog} 764 = -2{,}8831$.

Podemos encontrar un número igual a $-2{,}8831$ que tenga positiva la parte decimal

$$-2{,}8831 = -2 - 0{,}8831 = -2 - 1 + 1 - 0{,}8831 = \\ = -3 + 0{,}1169 = \bar{3}{,}1169$$

donde el signo $-$ escrito encima del 3 indica que 3 es negativo y 0,1169 positivo.

La siguiente regla resulta útil para encontrar rápidamente el cologaritmo de un número.

Para hallar el cologaritmo de un número:

1.º) *se suma una unidad a la característica del logaritmo y se cambia de signo;*

2.º) *las cifras decimales de la mantisa se restan de* 9, *excepto la primera cifra significativa de la derecha, que se resta de* 10.

11 Cambio de base

Vamos a expresar $\log_b x$ en función de logaritmos de base a. Sean $\log_b x = c$, $\log_a x = y$

$$\left.\begin{array}{l} \log_a x = y \Longrightarrow a^y = x \\ \log_b x = c \Longrightarrow b^c = x \end{array}\right\} \Longrightarrow a^y = b^c \quad [1]$$

Podemos hallar el logaritmo en base a de los dos miembros de la igualdad [1]

$$a^y = b^c \Longrightarrow \log_a a^y = \log_a b^c \Longrightarrow y \log_a a = c \cdot \log_a b$$

como $\log_a a = 1$, resulta:

$$y = c \cdot \log_a b$$

$$\text{luego } \log_a x = \log_b x \cdot \log_a b \Longrightarrow \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Ejemplo:

- Queremos calcular $\log_5 60$

$$\log_5 60 = \frac{\log_{10} 60}{\log_{10} 5} = \frac{\log 60}{\log 5} = \frac{1{,}7782}{0{,}6990} = 2{,}5439$$

23. Calcula sin utilizar las tablas:

a) $\operatorname{colog}_2 8$; b) $\operatorname{colog}_3 81$;

c) $\operatorname{colog}_7 49$; d) $\operatorname{colog}_6 6$;

e) $\operatorname{colog}_{\frac{1}{5}} 25$; f) $\operatorname{colog}_{\frac{1}{3}} 243$.

24. Con ayuda de las tablas del final del libro, calcula:

a) $\operatorname{colog} 345$; b) $\operatorname{colog} 649$;

c) $\operatorname{colog} 78$; d) $\operatorname{colog} 4.328$.

25. Sabiendo que $\log 4 = 0{,}6021$ y $\log 3 = 0{,}4771$, calcula $\log_3 4$.

26. Calcula $\log_2 5$ sabiendo que $\log 5 = 0{,}6990$ y $\log 2 = 0{,}3010$.

Ejercicios y cuestiones

27. Cambia las siguientes identidades escritas en forma logarítmica a la forma exponencial

$$\log_9 27 = \frac{3}{2}; \qquad \log_5 \frac{1}{625} = -4$$

28. ¿Cuál es el logaritmo de $\frac{1}{243}$ en base $\frac{1}{3}$?

29. Halla $\log_4 \frac{1}{64}$ y explica cómo lo haces.

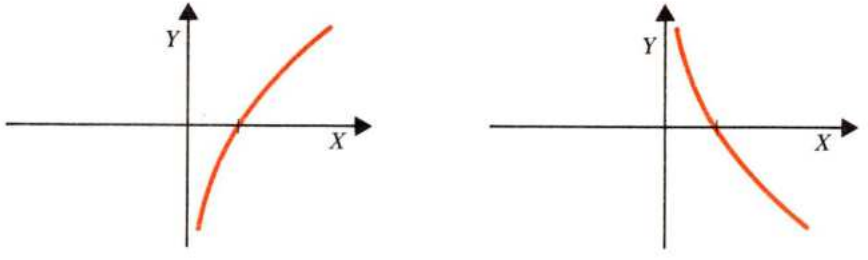
30. ¿Tienen algo en común los logaritmos de los números 3,1 y 3.100? Razona la respuesta.

31. ¿En qué base el logaritmo de 100 excede al logaritmo de 25 en dos unidades?

32. Sabiendo que $\log 16 = 1{,}2041$, calcula $\log 125$ sin usar las tablas.

33. Haz la gráfica de la función $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; para ello calcula previamente: $\log_{\frac{1}{2}} 1$, $\log_{\frac{1}{2}} 2$, $\log_{\frac{1}{2}} 4$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$

34. De las dos gráficas logarítmicas siguientes, ¿cuál corresponde a una base menor que 1?



35. ¿En qué gráfica de las dos anteriores se comprueba que el logaritmo de 2 puede ser un número negativo?

36. Si $\log_b 2 > 0$, ¿qué se puede decir de b?

37. ¿Cuál es la base en la cual el logaritmo de 125 es $\frac{3}{2}$?

38. Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{6x}, \qquad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^{x}, \qquad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{x+1}$$

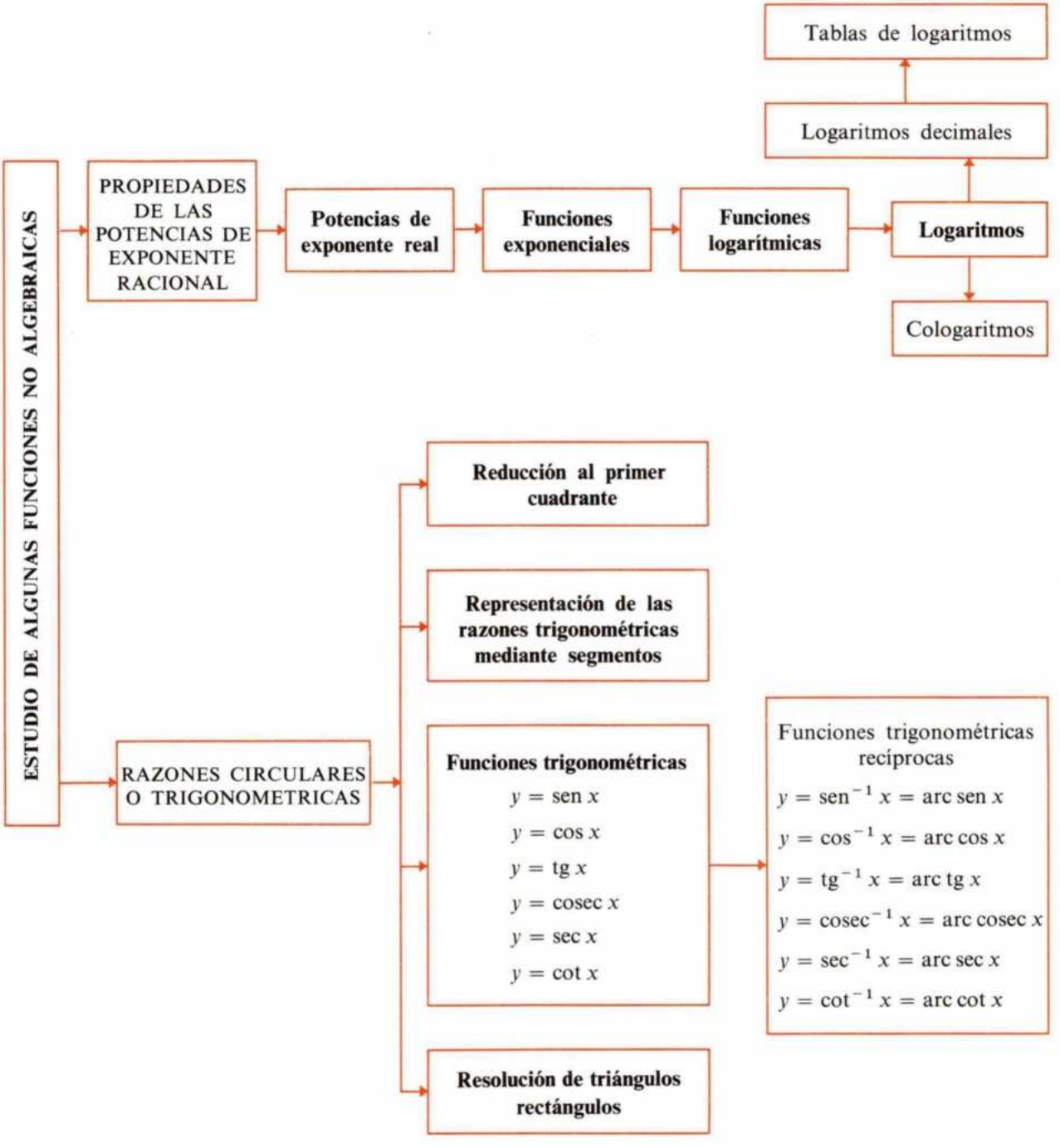
39. Prueba que si $\log b = \log a + \log 3$, entonces $\frac{1}{b} = \frac{1}{3}$

40. Calcula, mirando en las tablas, $\log \frac{12}{5}$ y $\log 6$.

41. Calcula, empleando logaritmos, $\sqrt[3]{14}$, $\sqrt[4]{86}$ y $\sqrt[5]{948}$.

DIAGRAMA ESTRUCTURAL DE LA UNIDAD 5

FUNCIONES CIRCULARES. FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARITMICA



Unidad 6 DERIVADAS Y PRIMITIVAS

El gran desarrollo que ha tenido el cálculo infinitesimal se debe en parte a dos problemas famosos. El primero se refiere a la tangente a una curva y el segundo al área limitada por una curva.

El estudio del primero de estos problemas dio origen al cálculo diferencial. Newton y Leibniz, independientemente uno del otro, llegaron al concepto de derivada que es la idea central del cálculo diferencial.

El estudio del área limitada por una curva dio origen al cálculo integral cuyo estudio se abordará el curso próximo; allí también se verá que los dos problemas mencionados están íntimamente unidos.

El primer tema de esta Unidad se dedica a establecer el concepto de derivada.

En el tema 19 se estudian algunas reglas de derivación que tanto ayudan para la obtención automática de las derivadas de algunas funciones.

La Unidad finaliza con una introducción elemental al cálculo de primitivas.

Tema 18

1. El concepto de recta tangente a una curva.
2. Pendiente de una curva en un punto.
3. Recta tangente a una curva.
4. Velocidad de un móvil.
5. Derivada de una función en un punto.
6. Función derivada.

Tema 19

1. Continuidad y derivabilidad.
2. Derivada de una suma de funciones.
3. Derivada del producto de una función por un número real.
4. El espacio vectorial real $(\mathscr{D}(]a, b[), +, \cdot\, \mathbb{R})$
5. Derivada de un producto de funciones.
6. Derivada de un cociente de funciones.
7. Derivación de las funciones polinómicas.
8. Derivación de la función $f(x) = [v(x)]^n$
9. Derivación de la función $y = \frac{k}{x^n}$.
10. Derivación de la función $y = f(x) = \sqrt{x}$.
11. Crecimiento y derivabilidad.
12. Cuadro resumen de derivadas.

Tema 20

1. Definición de primitiva de una función.
2. Estructura del conjunto de primitivas de una función.
3. Propiedades del cálculo de primitivas.
4. Primitivas. Integrales inmediatas.

Tema 18

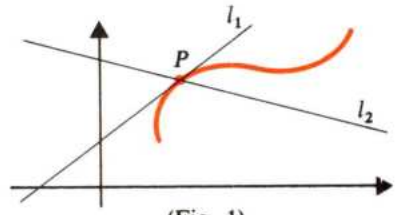
EL CONCEPTO DE DERIVADA

En este tema vamos a estudiar el concepto de derivada de una función real, fundamental para el estudio de una rama de la Matemática llamada Cálculo infinitesimal.

Vamos a llegar al concepto de derivada a través de dos caminos: uno, geométrico (estudio de la tangente a una curva en un punto), y otro, físico (estudio de la velocidad de un móvil, conocida su ley de movimiento); ambos problemas y otros muchos que se verán en cursos posteriores conducen de manera natural al concepto de derivada como límite de una cierta expresión, por ello el conocimiento previo del tema de límites es básico para la comprensión de éste.

1 El concepto de recta tangente a una curva

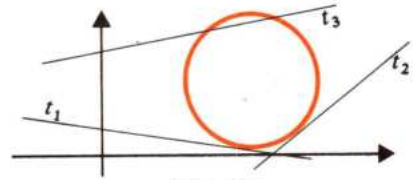
Consideremos la curva de la figura 1 y el punto P de dicha curva. Las rectas l_1 y l_2 tienen un significado distinto respecto a la curva; el alumno está acostumbrado a decir que l_1 es *tangente* a la curva en el punto P mientras que l_2 es *secante* a la curva en P.



(Fig. 1)

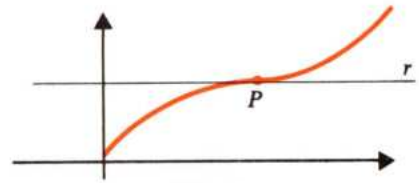
Sin embargo, cuando se intenta dar de forma precisa la definición de recta tangente a una curva en uno de sus puntos, surgen problemas.

Los griegos definieron la tangente a una circunferencia en un punto como una recta que tenía un punto común con la circunferencia y todos los demás fuera del círculo determinado por la cincunferencia. En la figura 2, t_1 y t_2 son tangentes a la circunferencia, mientras que t_3 no lo es.



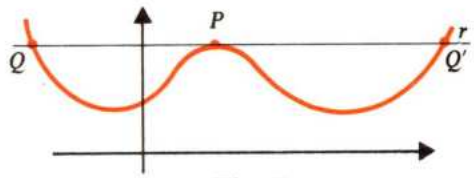
(Fig. 2)

Esta definición, que funciona bien con la circunferencia, no se puede extender a curvas más generales, pues, por ejemplo, en la figura 3 la recta r es tangente a la curva en P y, sin embargo, *no* todos los puntos de ella quedan en una misma región determinada por la curva.



(Fig. 3)

Se podría también tomar como definición de tangente a una curva en un punto P la de una recta que solamente tiene en común con dicha curva el punto P pero esto tampoco es satisfactorio, pues la recta r de la figura 4 es tangente a la curva en P y, sin embargo, tiene otros puntos comunes con la curva, como son Q y Q'.



(Fig. 4)

Todo esto nos lleva a tratar de precisar el concepto de tangente a una curva en uno de sus puntos.

2 Pendiente de una curva en un punto

2.1. Consideremos la curva de la figura 5 correspondiente a la gráfica de una función $y = f(x)$, y sean P_0 y P_1 dos puntos de la curva $P_0(x_0, y_0)$ y $P_1(x_1, y_1)$; la pendiente de la recta P_0P_1, secante a la curva, será $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.

Si llamamos $x_1 - x_0 = h$, se tiene que $x_1 = x_0 + h$ e $y_1 = f(x_1) = f(x_0 + h)$, de donde la pendiente de la recta P_0P_1 es

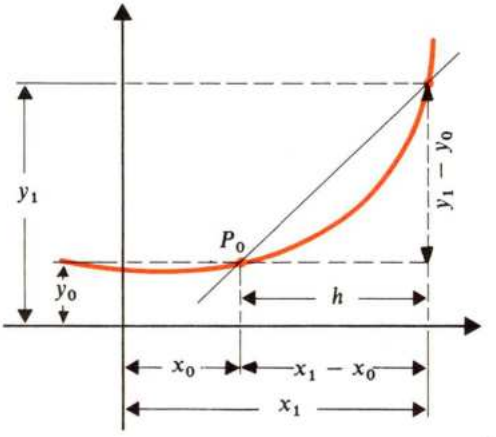
$$m(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Queda claro que la pendiente de una secante es una función del incremento h que la determina.

Conforme el punto P_1 se aproxima a P_0, el valor x_1 se aproxima a x_0, y h a cero, y, como se ve en la figura 6, las diversas rectas secantes $P_0P_1, P_0, P_2, \ldots, P_0P_n$ se aproximan a la recta t, que coincide con nuestro concepto intuitivo de tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P_0.

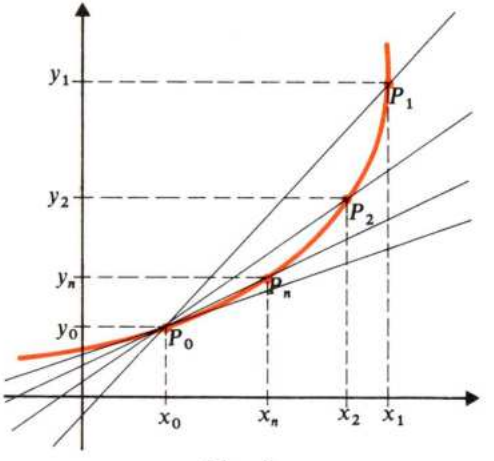
El anterior razonamiento conduce a la siguiente definición:

Se llama pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto $P_0(x_0, y_0)$ al límite: $\mathbf{m = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$



(Fig. 5)

Pendiente de la recta $P_0P_1 = m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$



(Fig. 6)

Ejemplos:

- Sea la curva $f(x) = x^2$. Vamos a calcular su pendiente en el punto $P(1, 1)$. Se tendrá:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^2 - 1^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + h^2 + 2h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 2) = 2$$

- Sea la curva $y = \dfrac{6}{x}$. Vamos a hallar su pendiente en el punto de abscisa $x = 3$. Se tendrá $y = f(x) = \dfrac{6}{x}$, y el punto será el $P(3, 2)$, pues $y = \dfrac{6}{3} = 2$. La pendiente será entonces:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{6}{3 + h} - \dfrac{6}{3}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-6h}{3h(3 + h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-2}{3 + h} = -\frac{2}{3}$$

Ejercicios:

1 Calcula la pendiente en los puntos de abscisas 1, 2, 10 de la gráfica de la función $f(x) = 3x - 1$.

2. Dada la curva representada por la función $y = x^3$, halla su pendiente en el punto de abscisa 2.

- Sea $y = x^3 - 5x$. La pendiente de la curva correspondiente en $x_0 = 0$ será:

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 - 5h}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} (h^2 - 5) = -5$$

- En la curva definida por $f(x) = y = x^3 + 2x^2$, vamos a hallar los puntos en los que la pendiente vale 4. Sea $P(x_0, y_0)$ uno de estos puntos.

Se tiene:

$$m = 4 = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[(x_0+h)^3 + 2(x_0+h)^2] - (x_0^3 + 2x_0^2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 + 2x_0^2 + 4x_0h + 2h^2 - x_0^3 - 2x_0^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 + 4x_0h + 2h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} (3x_0^2 + 3x_0h + h^2 + 4x_0 + 2h) = 3x_0^2 + 4x_0$$

Resolviendo la ecuación $3x_0^2 + 4x_0 = 4$, se obtendrán los puntos en los que la pendiente es 4. Como las soluciones de la ecuación son $\begin{cases} x_0' = -2 \\ x_0'' = \frac{2}{3} \end{cases}$, se tiene:

$$f(x_0') = f(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 = 0;$$

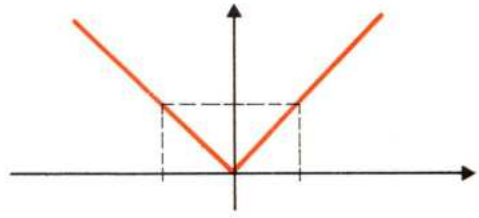
$$f(x_0'') = f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{32}{27}$$

luego los puntos son $(-2, 0)$ y $\left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right)$

2.2. En un punto de una curva puede no estar definida la pendiente, como ocurre en la función $y = |x|$ definida por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

cuya gráfica es la de la figura 7.



(Fig. 7)

3. Dada la curva de ecuación $y = x^2 + 1$, calcula las pendientes de las secantes determinadas por los puntos cuyas abscisas se indican en la siguiente tabla:

x_0	h	$x_0 + h$	$f(x_0+h)$	$m(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$
1	1	2	5	3
1	0,5	1,5	3,25	
1	0,1	1,1	–	
1	0,01			
1	0,001			

¿A qué número se acerca $m(h)$ cuando h se va acercando a cero?

¿Cuál es la pendiente de la tangente a la curva dada en el punto de abscisa $x_0 = 1$?

Para calcular su pendiente en $x_0 = 0$ tendremos que calcular el límite siguiente:

$$\lim_{h\to 0} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

Ahora bien, el límite por la derecha de esta expresión es:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

mientras que por la izquierda es: $\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$

Como estos dos límites son distintos se sigue (Ver tema 13) que *no* existe $\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$ y, por tanto, la curva $y = |x|$ *no* tiene tangente en $x_0 = 0$.

Se puede comprobar que sin embargo posee pendiente en cualquier otro punto. Así en $x_0 = 2$, la derivada es:

$$\lim_{h\to 0} \frac{|2+h|-|2|}{h} \overset{①}{=} \lim_{h\to 0} \frac{2+h-2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

En el paso ① se ha tenido en cuenta que $2 + h > 0$, ya que h tiende a 0, luego $|2 + h| = 2 + h$.

2.3. Otro ejemplo análogo lo proporciona la función parte entera $y = E(x)$, es decir, la función que asocia a cada número x el mayor entero menor o igual que x. Su gráfica es la de la figura 8.

Si queremos calcular su pendiente en $x = 1$, tenemos que hallar el límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{E(1+h)-E(1)}{h}$$

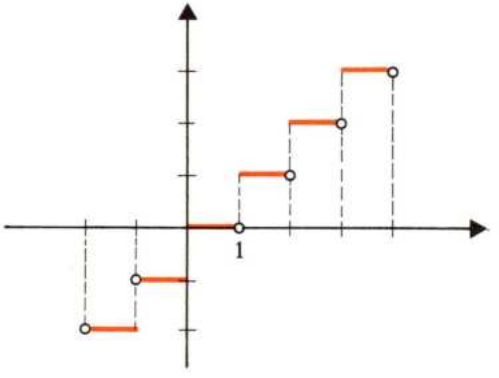
Veamos analíticamente que dicho límite no existe.

Calculando los límites por la derecha y la izquierda, se tiene:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{E(1+h)-E(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{0}{h} = 0$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{E(1+h)-E(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{0-1}{h} = \infty$$

Como estos límites laterales no coinciden, resulta que no existe el límite buscado y la función $y = E(x)$ *no* tiene tangente en $x_0 = 1$.



(Fig. 8)

4. Se considera la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si} \quad x > 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

¿Tiene su gráfica tangente en $x_0 = 0$? ¿Y en $x = 2$?

5. Demuestra que la pendiente de una función afín $y = ax + b$ vale en cualquier punto a.

6. Comprueba que la siguiente función no posee pendiente en el punto de abscisa $x = 1$. ¿Y en el de abscisa 3? ¿Y en el de abscisa -8?

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x > 1 \\ 2 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \end{cases}$$

3 Recta tangente a una curva

Sea una curva cuya ecuación viene dada por la función $y = f(x)$ y sea $P_0(x_0, y_0)$ un punto de dicha curva, es decir, $y_0 = f(x_0)$.

Se define la *recta tangente a la curva en el punto* P_0 como la recta que pasa por P_0 y cuya pendiente es la pendiente de la curva en P_0.

Si $m = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, entonces, como ya hemos visto al estudiar la ecuación de la recta, la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $P_0(x_0, y_0)$ será:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

o también:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ejemplos:

- Sea $y = x^3 - 2x$. La pendiente de la curva en $P_0(0, 0)$ es:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3 - 2h}{h} = -2$$

entonces la *ecuación de la tangente a la curva* $y = x^3 - 2x$ en $(0, 0)$ será:

$$\frac{y - 0}{x - 0} = -2$$

es decir: $y + 2x = 0$.

- Sea la curva de ecuación $y = \dfrac{1}{x}$. Vamos a hallar la ecuación de la tangente a la curva en el punto de abscisa $x_0 = 1$; entonces $y_0 = \dfrac{1}{x_0} = 1$; la pendiente será:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{1 + h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(1 + h)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{1 + h} = -1$$

luego la ecuación de la tangente en el punto $(1, 1)$ es:

$$\frac{y - 1}{x - 1} = -1$$

o también: $y - 1 = -x + 1 \Longrightarrow y + x - 2 = 0$.

7. Halla la ecuación de la tangente a la curva de ecuación $y = x^2 - 1$ en el punto (1,0).

8. Halla la tangente a la curva $y = 3x$ en el punto de abscisa $x_0 = 1$.

9. ¿Cuál es la ecuación de la tangente a una recta en uno cualquiera de sus puntos?

4 Velocidad de un móvil

Supongamos un móvil con un movimiento rectilíneo que se desplaza siguiendo una trayectoria que viene dada por una función del tiempo $f(t) = 6t - t^2$, donde t representa el tiempo en segundos y $f(t)$ el espacio recorrido en metros en los t segundos.

Nos planteamos el problema de determinar la velocidad instantánea del móvil a los 5 segundos de movimiento.

En primer lugar debemos precisar el significado del término «velocidad instantánea».

Supongamos que han transcurrido h segundos a partir de los cinco primeros segundos, entonces el espacio recorrido en esos h segundos será:

Espacio recorrido en los h segundos = espacio recorrido en $(5 + h)$ segundos − espacio recorrido en los 5 primeros segundos $= f(5 + h) - f(5) = [6(5 + h) - (5 + h)^3] - [6 \cdot 5 - 5^3] =$
$= -(69h + 15h^2 + h^3)$.

Entonces:

$$\text{Velocidad media en los } h \text{ segundos} = \frac{\text{espacio recorrido}}{\text{tiempo empleado}} = \frac{-(69h + 15h^2 + h^3)}{h} = -(69 + 15h + h^2)$$

En la tabla de la figura 9 se ve que si h se aproxima a cero en valor absoluto, entonces la velocidad media en h segundos se aproxima a -69; parece entonces natural decir que la velocidad instantánea del móvil a los 5 sgs es -69 m/sg.

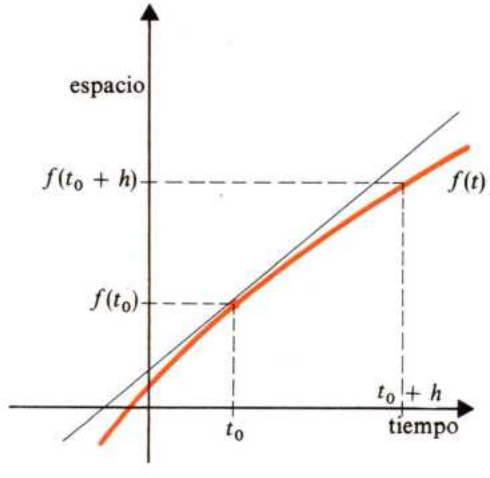
h sgs.	veloc. media
0,1	−70,51
−0,1	−67,51
0,01	−69,50
−0,01	−68,850

(Fig. 9)

En general podemos entonces definir la velocidad instantánea v del móvil de trayectoria $f(t)$ en el instante t_0 como

$$\mathbf{v = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}}$$

Se observa que si la trayectoria del móvil viene dada por una función del tiempo $f(t)$, entonces la *velocidad instantánea a los t_0 segundos es precisamente la pendiente de la curva que representa la función $f(t)$*, como se ve en la figura 10.



(Fig. 10)

5 Derivada de una función en un punto

5.1. Los dos ejemplos anteriores: el estudio de la tangente a una curva en uno de sus puntos y el de la determinación de la velocidad instantánea de un móvil, han hecho intervenir la misma expresión:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Vamos ahora a introducir un concepto que engloba a los anteriores y a otros muchos que estudiaremos más adelante; este concepto es el de derivada de una función en un punto.

Sea f una función real y $]a, b[$ un intervalo abierto tal que $]a, b[\subset \text{Dom}(f)$, y sea $x_0 \in]a, b[$.

Se llama derivada de f en el punto x_0 al límite, si existe:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{f(x_0 + h) - f(x_0)}}{\mathbf{h}}$$

Para representar la derivada de f en x_0 se suele escribir $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}$ o $f'(x_0)$. La notación $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}$ fue introducida por Leibniz.

Ejemplos:

- Sea $f(x) = x^3 - x^2 + 1$, entonces para calcular su derivada en $x_0 = 1$ tendremos que calcular el siguiente límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3-(1+h)^2+1-(1^3-1^2+1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^3 + 2h^2 + h}{h} = \lim_{h\to 0} (h^2 + 2h + 1) = 1, \text{ luego } \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=1} = 1$$

- Sea $f(x) = \frac{1}{x^2}$, entonces:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=2} = \lim_{h\to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(2 + h)^2} - \frac{1}{2^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h - 4}{4(2 + h)^2} = -\frac{1}{4}$$

10. Halla la velocidad instantánea a los 10 sgs de un móvil cuya trayectoria viene dada por $s = \frac{1}{2} t^2 - t$, donde t = tiempo en segundos y s = espacio recorrido en metros.

11. Calcula en $x_0 = 2$ la derivada de la función $f(x) = x^2 + 4$.

12. Halla en el punto x_0 la derivada de $f(x) = \frac{2}{x^2}$.

13. ¿Se anula en algún punto la derivada de $y = \frac{2}{x^2}$?

14. Considera las funciones $f(x) = 2x^2 - 1$ y $g(x) = 3x + 4$ y halla sus respectivas derivadas en el punto $x_0 = 1$.

¿Cuál es la función $f + g$?

Halla la derivada de esta suma en $x_0 = 1$ y compara el resultado obtenido con las derivadas de f y g en $x_0 = 1$. ¿Qué se observa?

5.2. Se observa que, establecida la anterior definición de derivada, se tiene:

a) *La pendiente de una curva $y = f(x)$ en el punto $x = x_0$ es la derivada de la función $f(x)$ en el punto de abscisa x_0.*

b) *La velocidad de un móvil, cuya trayectoria viene dada por la función $s = f(t)$, en el instante t_0 es la derivada de la función $f(t)$ en el punto t_0.*

Así, si el espacio recorrido por un móvil viene dado en metros en función del tiempo por $s = f(t) = t^2 + 6t - 1$, su velocidad instantánea a los 4 sgs. es:

$$v = \left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=4} = \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[(4+h)^2 + 6(4+h) - 1] - 39}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 14h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} (h + 14) = 14, \text{ es decir, } v = 14 \text{ m/sg}$$

Análogamente para hallar la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^3 - 1$ en $P_0(0, -1)$ calculamos la derivada de y en dicho punto, su pendiente será:

$$m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 - 1 + 1}{h} = \lim_{h\to 0} h^2 = 0$$

Luego la ecuación de la tangente será:

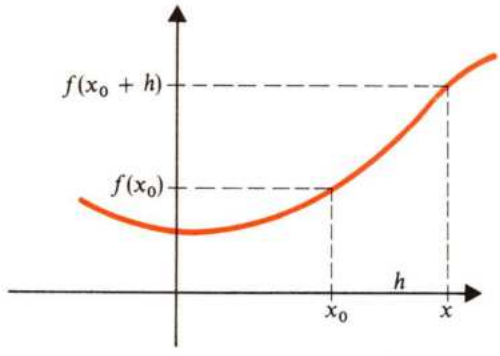
$$\frac{y+1}{x-0} = 0 \Longrightarrow y + 1 = 0$$

5.3. La derivada de una función $y = f(x)$ puede darse de otra forma equivalente que se encuentra en muchos textos, como:

$$\left(\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}\right)_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\mathbf{f(x) - f(x_0)}}{\mathbf{x - x_0}}$$

Veamos que, en efecto, nuestra definición conduce a ésta. Observa en la figura 11 que si $x - x_0 = h$, entonces si $h \longrightarrow 0$, se tiene que $x \longrightarrow x_0$, y recíprocamente, luego:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



(Fig. 11)

15. ¿Cuál es la derivada de $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ en el punto $x_0 = 0$?

16. Halla la ecuación de la tangente a la curva $y = x^2 + x$ en el punto $P(0, 0)$.

17. Un móvil sigue, respecto a un sistema de referencia, una trayectoria dada por la función $s = \dfrac{1}{2} t^2 - 6t - 1$, donde s es el espacio recorrido en metros y t el tiempo. Halla:

    a) Su velocidad instantánea a los 3 sgs.

    b) ¿En qué momento la velocidad instantánea se hace nula?

18. Utilizando las dos formas de definición de la derivada, halla la derivada de las siguientes funciones en $x_0 = 1$:

    a) $y = \dfrac{1}{3x^2 - 6}$; b) $y = x + 1$

    c) $y = \dfrac{6x^2}{3x + 1}$; d) $y = \dfrac{1}{x} - 2x + x^2$

Ejemplo:

- Vamos a calcular la derivada de $y = x^2 + 1$ en $x = 4$.

  Se tiene:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=4} = \lim_{x\to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x\to 4} \frac{x^2 + 1 - 17}{x - 4} =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x\to 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4} = \lim_{x\to 4} (x + 4) = 8$$

6 Función derivada

6.1. Sea f una función real definida en el intervalo abierto $]a, b[$. Se dice que *f es derivable en* $]a, b[$ si $\forall\, x \in]a, b[$ existe la derivada de f en el punto x.

Ejemplos:

- Sea $f(x) = x^2$; entonces f es derivable en $]0,1[$, ya que si $x_0 \in]0, 1[$, se tiene:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2x_0 h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x_0 + h) = 2x_0;$$

  esto es, existe siempre derivada en todo punto de $]0,1[$.

- La función $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \leqslant 0 \\ 2x \text{ si } x > 0 \end{cases}$, cuya gráfica es la de la figura 12, *no* es derivable en $]-1, 1[$, pues no tiene derivada en $x = 0 \in]-1, 1[$, ya que:

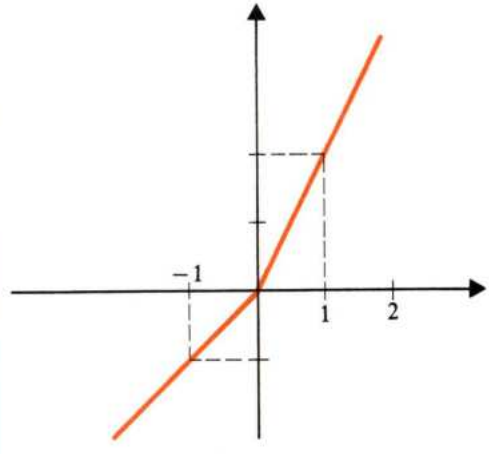
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2h}{h} = 2$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

  y como los límites laterales no coinciden, no existe el límite, y por tanto, *f no* posee derivada en $x_0 = 0$.

- La función del ejemplo anterior (Fig. 12) es, sin embargo, derivable en $]1,2[$, ya que en este intervalo si $x_0 \in]1,2[$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(x_0 + h) - 2x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2$$



(Fig. 12)

Nota: De los dos ejemplos últimos se ve la importancia de decir el intervalo en donde se estudia la función, pues ésta puede ser derivable o no según dicho intervalo.

6.2. Si f es derivable en $]a, b[$, se llama *función derivada de f* o *derivada primera de f* a la aplicación $\mathbf{Df}: \mathbf{]a, b[} \longrightarrow \mathbb{R}$

dada por

$$\mathbf{(Df)(x_0)} = \left(\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}\right)_{x=x_0}, \quad \forall\, \mathbf{x_0} \in \mathbf{]a, b[}$$

Es decir Df es la función que asocia a cada punto $x_0 \in]a, b[$ la derivada de f en dicho punto.

Ejemplo:

- Sea $f(x) = x^3 - 8$, f es derivable en $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$, ya que si $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^3-8-x_0^3+8}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0} (3x_0^2 + 3x_0h + h^2) = 3x_0^2$$

Entonces $Df: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ viene definida por $(Df)(x) = 3x^2$.

6.3. Sea $s = f(t)$ la ecuación de la trayectoria de un móvil. Si $f(t)$ es derivable en $]a, b[$, la función derivada será la que asocia a cada instante de tiempo t_0 comprendido entre los tiempos a y b el valor de la velocidad instantánea del móvil a los t_0 segundos; esta función se llama la *velocidad instantánea del móvil en el intervalo de tiempo* $]a, b[$

$$\mathbf{v}: \mathbf{]a, b[} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \mathbf{t_0} \longrightarrow \mathbf{v(t_0)} = \left(\frac{\mathbf{ds}}{\mathbf{dt}}\right)_{t=t_0}$$

6.4. Si f es derivable en $]a, b[$, se ha visto que tenemos determinada una nueva función, la función derivada

$$Df:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$$

Si esta función es a su vez derivable en $]a, b[$, su función derivada se llama la *derivada segunda de f en* $]a, b[$, y se escribe: D^2f o $\dfrac{d^2f}{dx^2}$.

De forma análoga se definen las derivadas tercera, cuarta, etc., de f en $]a, b[$.

19. Halla la función derivada de

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

20. ¿Es derivable Df en el intervalo $]-\infty, \infty[$ si f es la función del ejercicio **19.**?

Ejemplo:

- Sea $f(x) = \frac{2}{x}$. Entonces f es derivable en $]0, \infty[$, ya que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{x_0+h} - \frac{2}{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{hx_0(x_0+h)} = \frac{-2}{x_0^2}$$

Si $x_0 \neq 0$, $\frac{-2}{x_0^2}$ tiene sentido; entonces $Df:]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ viene definida por $(Df)(x_0) = \frac{-2}{x_0^2}$.

Vamos a ver si la función Df es derivable en $]0, \infty[$; se tiene si $x_0 \in]0, \infty[$ que

$$\lim_{h\to 0} \frac{(Df)(x_0+h) - (Df)(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-2}{(x_0+h)^2} - \frac{-2}{x_0^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h + 4x_0}{x_0^2(x_0+h)^2} = \frac{4}{x_0^3}$$

Si $x_0 \neq 0$, $\frac{4}{x_0^3}$ está definida; por tanto la derivada segunda de f es la función $D^2f:]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$x_0 \longrightarrow \frac{4}{x_0^3}$$

6.5. Sea $f(t) = 3t^2 - 6t + 1$ la trayectoria de un móvil. Entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[3(t_0+h)^2 - 6(t_0+h) + 1] - [3t_0^2 - 6t_0 + 1]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6t_0h + 3h^2 - 6h}{h} = \lim_{n\to 0} (6t_0 - 6 + 3h) = 6t_0 - 6$$

Luego la velocidad del móvil viene dada por $v(t) = 6t - 6$. La derivada segunda de la trayectoria $f(t)$ será la derivada de $v(t)$, es decir:

$$(D^2f)(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{v(t_0+h) - v(t_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[6(t_0+h) - 6] - [6t_0 - 6]}{h} = 6$$

Nota: La derivada segunda de la trayectoria se llama la *aceleración instantánea del móvil.*

21. Calcula D^2f y el máximo dominio donde está definida si $f(x) = 2x^3 + 4x$

22. La trayectoria de un móvil viene dada por

$$f(t) = 2t^2 - 5t + 1$$

Halla:

a) La expresión que define la velocidad instantánea del móvil.

b) La velocidad instantánea en $t = 4$ segundos.

c) La aceleración a los 6 segundos.

Ejercicios y cuestiones

23. Calcula la pendiente en los puntos de abscisas 1, 2, 10 de la gráfica de la función $f(x) = 5x + 2$.

24. ¿Cuál es la pendiente de $y = E(x)$ en el punto de abscisa $x_0 = 3{,}7$?

25. ¿Existe algún punto de la curva $y = x^3 - 2x$ en el que su pendiente sea 0? Hállalo.

26. Halla los puntos de la curva $y = x^3 - 2x^2 + 1$ en el que la pendiente valga 4.

27. Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el origen.

28. Halla los puntos de la parábola $y = 3x^2 - 5$ en los que su tangente es paralela a la recta $y = x + 1$.

29. Dada la curva $y = x^3 - 10x$, halla si existe algún punto en el que la recta tangente en ese punto sea horizontal. ¿Y vertical?

30. Halla la recta que pasa por (1, 2) y es paralela a la tangente a la curva $y = x^3 - 2x + 6$ en el punto (0, 6).

31. ¿En qué punto de la curva $y = 3x^2 - 6x$ la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante?

32. Un móvil se desplaza siguiendo una trayectoria cuya ecuación viene dada por $s = 6t^2 - t$. ¿En algún instante su velocidad instantánea es nula?

33. Halla en qué momento la velocidad instantánea del móvil del problema anterior es 11 m/sg.

34. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

¿Cuál es la derivada de f en $x_0 = 1$? ¿Y en $x_0 = 0$? ¿Y en $x_0 = -4$?

Tema 19 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DERIVABLES

Se inicia el tema estableciendo que la derivabilidad implica la continuidad. A continuación se estudia el comportamiento de la derivabilidad de funciones respecto a las operaciones entre dichas funciones ya estudiadas en temas anteriores, estudiándose la estructura algebraica del conjunto de las funciones derivables en un intervalo $]a, b[$.

Asimismo se estudian las funciones derivadas de algunas de las funciones elementales.

Finalmente, se relaciona el concepto de derivada con el de crecimiento en un punto, introducido en el apartado **2.**, *tema* 12.

1 Continuidad y derivabilidad

El siguiente teorema relaciona la existencia de derivada de una función en un punto con la continuidad en dicho punto.

Sea $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $x_0 \in]a, b[$; entonces f es continua en x_0.

Tendremos que demostrar que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ o, lo que es lo mismo, que $\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$; pero por ser f derivable en x_0, resulta:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

luego de $f(x) - f(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$ se tiene,

tomando límites:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) =$$
$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Podemos hacernos la pregunta recíproca: si f es continua en x_0, ¿es f derivable en x_0?

La respuesta es negativa, como se ve en el siguiente ejemplo:

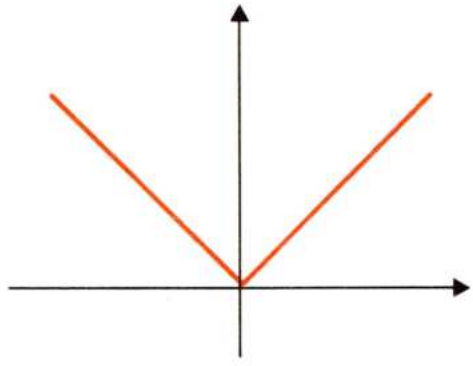
Ejemplo:

- Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida según $f(x) = |x|$ cuya gráfica es la de la figura 1; entonces f es continua en $x = 0$ y sin embargo no tiene derivada en $x = 0$, ya que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

luego $\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ no existe, y por tanto no tiene derivada en el punto $x = 0$.



(Fig. 1)

2 Derivada de una suma de funciones

2.1. En este apartado vamos a tratar de contestar a la siguiente pregunta: si dos funciones poseen derivada en un punto, ¿posee derivada en dicho punto su función suma?; y en caso afirmativo, ¿existe alguna relación entre la derivada de la suma y las derivadas de cada sumando?

La respuesta a estas preguntas viene dada por el siguiente teorema:

Si dos funciones $f, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *son derivables en* $x_0 \in]a, b[$, *entonces su suma es derivable en* x_0 *y la derivada de la suma en* x_0 *es la suma de las derivadas en* x_0 *de cada uno de los sumandos.*

En símbolos: $\mathbf{(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)}$.

En efecto:

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x_0+h) + g(x_0+h)] - [f(x_0) + g(x_0)]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x_0+h) - f(x_0)] + [g(x_0+h) - g(x_0)]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} =$$

$$= f'(x_0) + g'(x_0)$$

Ejercicios:

1. Justifica todos los pasos dados en la demostración del teorema **2.1.**

2. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas según $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x$, $h(x) = 6x^3$. Calcula:

   a) $f'(3)$, $g'(3)$, $h'(3)$
   b) $(f + g)'(3)$, $(f + h)'(3)$.

3. Demuestra que si $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $x_0 \in]a, b[$, entonces $-f$ lo es, y se tiene: $(-f)'(x_0) = -[f'(x_0)]$.

Ejemplo:

- Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 3x$; se tiene

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2$$

Análogamente $g'(1) = 3$. Entonces, como la función $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x^2 + 3x$ es tal que $h = f + g$, se tiene que

$$h'(1) = f'(1) + g'(1) = 2 + 3 = 5$$

2.2. Los siguientes resultados son inmediatos:

Si $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *posee derivada en* $x = x_0 \in]a, b[$, *entonces* $-f$ *posee derivada en* x_0, *y se tiene:* $(-f)'(x_0) = -[f'(x_0)]$.

Ejemplo:

- Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.

Se ha visto en el ejemplo del punto **2.1.** que $f'(1) = 2$; entonces la derivada de la función $-f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $(-f)(x) = -x^2$, en $x = 1$, será $(-f)'(1) = -2$.

2.3. *Si* $f, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *son dos funciones derivables en* $x_0 \in]a, b[$, *entonces su diferencia es derivable en* x_0, *y se tiene:*

$$\mathbf{(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)}$$

Ejemplo:

- Sea $h :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \frac{1}{x} - 2x$. Es evidente que $h = f - g$, donde $f, g :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ vienen definidas respectivamente por $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = 2x$. Como $f'(1) = -1$ y $g'(1) = 2$ (compruébelo el alumno), se tiene que

$$h'(1) = f'(1) - g'(1) = -1 - 2 = -3$$

2.4. Del teorema relativo a la derivada de una suma se deduce que: *si* f *y* g *son funciones derivables en* $]a, b[$ *y* Df *y* Dg *sus funciones derivadas respectivas, entonces* $f + g$ *es derivable en* $]a, b[$ *y su función derivada es la suma de las funciones derivadas de* f *y* g; en símbolos:

$$D(f + g) = (Df) + (Dg) :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$$

o también

$$\mathbf{(f + g)' = f' + g' :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}}$$

4. Sean $f, g, h :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ tres funciones que poseen derivada en $x_0 \in]a, b[$. Demuestra que entonces la función $f + g + h$ posee derivada en x_0 y se verifica:

$$(f + g + h)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) + h'(x_0)$$

5. Demuestra el teorema **2.3.**

6. Sean las funciones

$f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{2}{x}$

$g :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{1}{1 + x}$

Halla:

a) $f'(2)$, $g'(2)$

b) $f - g$

c) $(f - g)'(2)$

7. Sean las funciones $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x^3, \; g(x) = 2x^2, \; h(x) = 6x + 4$$

Halla:

a) $f'(-1)$, $g'(-1)$, $h'(-1)$

b) $f + g$, $f - g + h$

c) $(f + g)'(-1)$, $(f - g + h)'(-1)$

3 Derivada del producto de una función por un número real

3.1. *Sea* $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *una función derivable en* $x_0 \in]a, b[$ *y* $c \in \mathbb{R}$; *entonces la función* $cf :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *es derivable en* x_0, *y se tiene:* $\mathbf{(cf)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)}$

En efecto:

$$(cf)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(cf)(x_0 + h) - (cf)(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{c \cdot f(x_0 + h) - c \cdot f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c[f(x_0 + h) - f(x_0)]}{h} =$$

$$= c \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = c \cdot f'(x_0)$$

Ejemplo:

- Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$; entonces $3f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $(3f)(x) = 3 \cdot f(x) = 3x^3$; como $f'(1) = 3$ (compruébelo el alumno), se tiene: $(3f)'(1) = 3 \cdot f'(1) = 3 \cdot 3 = 9$.

3.2. *Si* $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *es derivable en* $]a, b[$, *entonces* $\forall\, c \in \mathbb{R}$ cf *es derivable en* $]a, b[$, *y se tiene para las funciones derivadas:*

$$D(cf) = c \cdot (Df), \quad \textit{o también} \quad \mathbf{(cf)' = cf'}$$

8. Justifica todos los pasos de la demostración del teorema **3.1.**

4 El espacio vectorial real $(\mathscr{D}(]a, b[), +, \cdot\, \mathbb{R})$

Sea el intervalo abierto $]a, b[$; representaremos por $\mathscr{D}(]a, b[)$ *el conjunto de todas las funciones definidas y derivables en* $]a, b[$.

Si definimos las operaciones

a) $\mathscr{D}(]a, b[) \times \mathscr{D}(]a, b[) \longrightarrow \mathscr{D}(]a, b[)$

$$(f, g) \longrightarrow f + g$$

que asocia a cada par de funciones su suma, como se vio en el tema 11,

b) $\mathbb{R} \times \mathscr{D}(]a, b[) \longrightarrow \mathscr{D}(]a, b[)$

$$(c, f) \longrightarrow cf$$

que asocia a cada función f y a cada número real c la función producto definida, como en el tema 11,

9. Sea $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$.

¿Cuál es la función $3f$?

Halla $f'(2)$ y $(3f)'(2)$.

10. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 8$. Halla la función derivada de $-5f$, es decir: $D(-5f)$.

los teoremas de **2.4.** y **3.2.** demuestran que:

$(\mathscr{D}(]a, b[), +, \cdot\ \mathbb{R})$ es un espacio vectorial real que se denomina el espacio vectorial de las funciones derivables en $]a, b[$.

11. Justifica detenidamente las afirmaciones del apartado **4**.

5 Derivada de un producto de funciones

5.1. *Si $f, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones derivables en $x_0 \in]a, b[$, entonces su producto fg es derivable en x_0, y se tiene:*

$$\mathbf{(fg)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)}$$

En efecto:

$$(fg)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x_0+h) - (fg)(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x_0+h) - f(x_0)]g(x_0+h) + f(x_0)[g(x_0+h) - g(x_0)]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x_0+h) - f(x_0)]g(x_0+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0)[g(x_0+h) - g(x_0)]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} g(x_0+h) +$$

$$+ f(x_0)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Ejemplos:

- Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas según $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x + 4$.

  Es inmediato, y el alumno debe comprobarlo, que $f'(2) = 4$ y $f'(2) = 3$; entonces $h = fg : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada por

  $$h(x) = f(x)g(x) = x^2(3x + 4) = 3x^3 + 4x^2,$$

  y se tiene: $h'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = 4\cdot 10 + 4\cdot 3 = 52.$

- Sea $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = 3x^3 + 10x$. Entonces $h = f\cdot g$, donde $f(x) = 3x^2 + 10$ y $g(x) = x$. Se tiene que:

  $$f'(-1) = -6 \quad \text{y} \quad g'(-1) = 1,$$

  de donde: $h'(-1) = f'(-1)g(-1) + f(-1)g'(-1) =$
  $= (-6)\cdot(-1) + 13\cdot 1 = 19$

12. ¿En qué paso de la demostración del teorema **5.1.** se ha aplicado que las funciones son continuas?

13. Sean las funciones $g, f =]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definidas según $f(x) = x^2$, $g(x) = 6x + 1$.

Halla:

a) $f'(-2)$, $g'(-2)$

b) fg

c) $(fg)'(-2)$

14. Sea la función $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = 3x^2 + 6x^4$.

Descomponla en un producto de dos funciones y aplica en $x_0 = 1$ el teorema de la derivada del producto.

Del teorema **5.1.** se deduce:

5.2. *Si f, g son derivables en $]a, b[$, entonces fg es derivable en $]a, b[$ y su función derivada viene dada por:*

$$D(fg) = (Df) \cdot g + f \cdot (Dg)$$

o también

$$\mathbf{(fg)' = f'g + fg'}$$

Ejemplo:

- Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 3x + 1$$

se tiene:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = 2x_0$$

$$g'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{[3(x_0 + h) + 1] - (3x_0 + 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x_0 + 3h + 1 - 3x_0 - 1}{h} = 3$$

Las funciones derivadas f' y g' vienen definidas por:

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2x, \qquad g' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g'(x) = 3$$

La función derivada de $(fg)(x) = x^2(3x + 1) = 3x^3 + x^2$

$$(fg)'(x) = 2x \cdot (3x + 1) + x^2 \cdot 3 = 9x^2 + 2x$$

5.3. Teniendo en cuenta la propiedad asociativa del producto de funciones y el teorema **5.1.** se puede probar fácilmente que *si las funciones $f, g, h :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ son derivables en $x_0 \in]a, b[$, entonces la función fgh es derivable en x_0, y se tiene:*

$$(fgh)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0)h(x_0) + f(x_0)g'(x_0)h(x_0) + f(x_0)g(x_0)h'(x_0)$$

Del teorema **5.2.** y del **2.4.** se sigue:

5.4. *La terna $(\mathscr{D}]a, b[, +, \cdot)$ es un anillo que se llama el anillo de las funciones derivables en $]a, b[$.*

15. Sean las funciones $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x + 1, \; g(x) = x^2, \; h(x) = x^2 + x$$

Halla:

a) $f'(2)$, $g'(2)$, $h'(2)$

b) $(fg)'(2)$

c) $(fgh)'(2)$

16. Justifica las propiedades **5.3.** y **5.4.**

6 Derivada de un cociente de funciones

6.1. *Si* $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función derivable en* $x_0 \in]a, b[$ *y si* $f(x_0) \neq 0$, *entonces* $\frac{1}{f}$ *está definida en un entorno de* x_0, *es derivable en* x_0 *y se verifica:*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$$

La función derivada en los puntos en que está definida es

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

Ejemplos:

- La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ es derivable en $x_0 = 1$, como $f'(x) = 2x$ resulta que $f'(1) = 2$; además $f(1) = 1 \neq 0$, luego $\frac{1}{f}$ es derivable en $x_0 = 1$ y $\left(\frac{1}{f}\right)'(1) = -\frac{2}{1^2} = -2$.

- Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 9$; entonces f es derivable en $x_0 = -2$ y $f'(-2) = -4$ (Compruébelo el alumno); además $f(-2) = 13 \neq 0$, luego

  $$\frac{1}{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad \frac{1}{f}(x) = \frac{1}{x^2 + 9}$$

  es tal que

  $$\left(\frac{1}{f}\right)'(-2) = -\frac{f'(-2)}{[f(-2)]^2} = -\frac{-4}{13^2} = \frac{4}{169}$$

6.2. Si $f, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones derivables en $x_0 \in]a, b[$ y si $g(x_0) \neq 0$, entonces existe un entorno de x_0 en el que $\frac{f}{g}$ está definida y es derivable en x_0.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

La función derivada de $\frac{f}{g}$ en los puntos en que está definida es

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

En efecto:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g}(x_0) + f(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) =$$

$$= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \left(-\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}\right) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$$

Ejemplos:

- Consideremos de nuevo las funciones f y g del ejemplo del apartado **5.2.**

  $$f(x) = x^2,\ g(x) = 3x + 1$$

  Allí se vio que $f'(x) = 2x$, $g'(x) = 3$.

  Entonces la función derivada de

  $$h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{3x+1} \text{ es:}$$

  $$h'(x) = \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{2x \cdot (3x+1) - x^2 \cdot 3}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2 + 2x}{(3x+1)^2}$$

  con tal que $3x + 1$ no sea nulo.

- Sea $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \dfrac{3x}{2x^2+4}$. Entonces $h = \dfrac{f}{g}$, donde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es $f(x) = 3x$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es $g(x) = 2x^2 + 4$.

  El alumno puede comprobar fácilmente que:

  $$f'(1) = 3 \quad \text{y} \quad g'(1) = 4, \quad \text{de donde}$$

  $$h'(1) = \frac{f'(1)g(1) - f(1)g'(1)}{[g(1)]^2} = \frac{3 \cdot 6 - 3 \cdot 4}{6^2} = \frac{1}{6}$$

- Sean $g, f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $g(x) = x^2$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$. Entonces $\dfrac{f}{g} :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ viene definida por

  $$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^3 + x^2},$$

  y se tiene

  $$\left(\frac{f}{g}\right)'(1) = \frac{f'(1)g(1) - f(1)g'(1)}{[g(1)]^2} = \frac{\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2}{1^2} = -\frac{5}{4}$$

Nota: Es conveniente que el alumno obtenga los valores $f'(1)$, $g'(1)$.

17. Justifica todos los pasos de la demostración del teorema **6.2.**

18. Dada la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 + 6$, halla $f'(-3)$ y $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(-3)$.

19. Dada la función $f(x) = x^2 - 1$, calcula $f'(6)$ y $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(6)$.

20. Dadas las funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^2 + 4$, calcula:

a) $f'(-2)$, $g'(-2)$; b) $\dfrac{f}{g}$; c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(-2)$

21. Halla la derivada de $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$ en $x = 2$ utilizando la fórmula del teorema **6.2.**

7 Derivación de las funciones polinómicas

7.1. La función constante $f(x) = c$ tiene por derivada cero en cualquier punto, ya que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

7.2. Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$.

Para hallar la función derivada $Df : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ consideramos un punto x_0 arbitrario.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0+h-x_0}{h} = 1$$

luego $Df : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por $f'(x) = (Df)(x) = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

7.3. Consideremos la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$. Se tiene $g = f \cdot f$, donde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = x$, y aplicando la regla del producto

$$g' = (ff)' = f'f + ff' = 2ff'$$

luego $g'(x) = 2f(x)f'(x) = 2x \cdot 1 = 2x$.

Análogamente, para la derivada de $y = f(x) = x^n$ se puede demostrar que $y' = nx^{n-1}$.

Teniendo en cuenta la derivada del producto de una función por una constante, la derivada de $y = ax^n$ será $y' = D(ax^n) = aD(x^n) = nax^{n-1} \Longrightarrow y' = nax^{n-1}$.

7.4. Sea ahora la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$ donde a y b son dos números reales. La derivada de la función afín f en un punto cualquiera x_0 es $y' = a$.

En efecto:

$$D(ax+b)(x_0) = D(ax)(x_0) + D(b)(x_0) = aD(x)(x_0) = a \cdot 1 = a.$$

La función afín f es derivable en todo $\mathbb{R}$ y su función derivada es:

$$\mathbf{f'(x_0) = (ax + b)' = a}$$

22. Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $y = x^3$; b) $y = x^4$; c) $y = x^7$

d) $y = 2x$; e) $y = 3x^2$; f) $y = 24x^7$

23. Demuestra que $D(ax + b) = a$, aplicando directamente la definición de derivada.

Ejemplos:

- La función derivada de $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 5x + 6$ es la función constante $g'(x) = 5$.

- La función derivada de $g' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g'(x) = 5$ es

$$D(g')(x) = g''(x) = 0$$

7.5. De lo dicho en los apartados **7.1.**, **7.2.** y **7.3.** y de las reglas de derivación de funciones se deduce que la derivada de la función polinómica $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ es $y' = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$.

Ejemplos:

- La función derivada de $y = 5x^3 - 6x^2 + 8x - 3$ es

$$y' = 15x^2 - 12x + 8$$

- La función derivada de $y = 6x^4 - 8x^3 + 1$ es $y' = 24x^3 - 24x^2$.

24. Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $y = 4x^3 - 7x^2 + 24x - 8$
b) $y = (3x^2 + 2x)$
c) $y = (2x^3 - x)^3$
d) $y = (4x^3 - 3x^2 + 1)^2$

8 Derivación de la función $f(x) = y = [v(x)]^n$

Sea $v :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $]a, b[$.

Por lo dicho en **5.2.** $v^2 = v \cdot v$ es derivable en $]a, b[$ y se tiene:

$$(v^2)' = v' \cdot v + v \cdot v' = 2vv'$$

Del mismo modo, la función $v^3 = v^2 \cdot v$ es derivable en $]a, b[$ y

$$(v^3)' = (v^2 \cdot v)' = (v^2)'v + v^2v' = 2vv' \cdot v + v^2v' = \\ = 2v^2v' + v^2v' = 3v^2v'$$

es decir $(v^3)' = 3v^2v'$.

Se puede demostrar por inducción que en general se tiene:

$$f' = y' = nv^{n-1}v'$$

o también $\quad \mathbf{f'(x) = y' = n[v(x)]^{n-1}\,v'(x)}$

Ejemplos:

- Sea $y = f(x) = [v(x)]^4$ donde $v(x) = 6x^2 - 5x + 1$.

  Como $v'(x) = 12x - 5$, se tiene:

$$y' = f'(x) = 4[v(x)]^3v'(x) = 4(6x^2 - 5x + 1)^3(12x - 5)$$

25. Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $y = (3x^2 + 2x)^4$; b) $y = (5x^3 - 7x)^5$
c) $y = (2x - 1)^7$; d) $y = (8x^2 + 3x - 1)^2$

26. Calcula la función derivada en:

a) $y = (x^5 + 1)^3$
b) $y = (x^4 + x^3 - x^2)^4$

- Sea $y = (3x + 2)^5$. Se puede poner $y = [v(x)]^5$ donde $v(x) = 3x + 2$. Aplicando la regla anterior se tiene

$$y' = 5[v(x)]^4 \cdot v'(x) = 5 \cdot (3x + 2)^4 \cdot 3 = 15(3x + 2)^4$$

9 Derivación de la función $y = \frac{k}{x^n}$

Sea la función $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{k}{x^n}$ con k constante.

Aplicando la regla de derivación de un cociente se tiene

$$f'(x) = \frac{x^n \cdot 0 - knx^{n-1}}{(x^n)^2} = \frac{-knx^{n-1}}{x^{2n}} = -nkx^{-n-1}$$

Ejemplos:

- $y = \frac{2}{x}$ $\qquad y' = \frac{x \cdot 0 - 2 \cdot 1}{x^2} = \frac{-2}{x^2}$
- $y = \frac{3}{x^2}$ $\qquad y' = \frac{x^2 \cdot 0 - 3 \cdot 2x}{x^4} = \frac{-6x}{x^4} = \frac{-6}{x^3}$
- $y = \frac{2x^3 + 2}{2x^2 + x}$ $\qquad y' = \frac{(2x^2 + x)6x^2 - (2x^3 + 2)(4x + 1)}{(2x^2 + x)^2} =$

$$= \frac{4x^4 + 4x^3 - 8x - 2}{(2x^2 + x)^2}$$

27. Calcula la función derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{4}{x^3}$; $\qquad$ b) $y = \frac{-7}{x^4}$

c) $y = \frac{3x}{4x^2 + 5x}$; $\qquad$ d) $y = \frac{-8x + 3}{6x + 5}$

10 Derivación de la función $y = f(x) = \sqrt{x}$

Consideremos la función $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = y = \sqrt{x}$; es decir, a cada número real positivo le asocia su raíz cuadrada positiva.

La función $f(x) = y = \sqrt{x}$ es inyectiva, y es recíproca de la función $x = y^2$; como esta última es continua, también es continua la función f (ver **3.9.** del tema 14).

La derivada de f en el punto $x_0 \in]0, \infty[$ será:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}) \cdot (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}$$

y teniendo en cuenta que f es continua en x_0, se tiene:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Luego la función derivada $f' :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ viene definida por $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Análogamente se puede probar que la función derivada de

$$y = \sqrt{x + a} \quad \text{es} \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x + a}}$$

28. Halla la función derivada de

a) $y = \sqrt{x + 1}$

b) $y = \sqrt{x - 3}$

c) $y = \sqrt{x + 6}$

11 Crecimiento y derivabilidad

En este apartado vamos a estudiar qué relación existe entre el hecho de ser una función creciente en un punto (ver apartado **2.3.** del tema 12) y el signo de la derivada en dicho punto.

11.1. *Sea* $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *una función derivable en* $x_0 \in]a, b[$; *entonces si* $f'(x_0)$ *es positiva,* f *es creciente en* x_0.

Si $f'(x_0) > 0$, esto quiere decir que $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, lo que indica que existe un entorno E de x_0 tal que

$$\forall\, x \in E, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

luego para todo $x \in E$, $f(x) - f(x_0)$ y $x - x_0$ tienen el mismo signo, es decir:

$$x > x_0 \Longrightarrow f(x) > f(x_0) \quad \text{y} \quad x < x_0 \Longrightarrow f(x) < f(x_0),$$

y por tanto f es creciente en x_0.

El siguiente teorema se demuestra de forma análoga:

11.2. *Sea* $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *derivable en* $x_0 \in]a, b[$*; entonces, si* $f'(x_0) < 0$, f *es decreciente en* x_0.

Ejemplos:

- La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ es creciente en $x_0 = 2$, ya que $f'(x) = 2x$ y $f'(x_0) = f'(2) = 4 > 0$. Esta misma función es decreciente en $x_0 = -1$, pues $f'(x_0) = f'(-1) = -2 < 0$.

- La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + 4x$ es creciente en cualquier punto, pues $f'(x_0) = 3x_0^2 + 4 > 0$.

- La función $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es decreciente en todo $x_0 \in]0, \infty[$, pues $f'(x_0) = -\dfrac{1}{x_0^2} < 0$.

Nota: El teorema de **11.1.** afirma que *si existe derivada en* x_0 *y ésta es positiva,* f *es creciente en* x_0*;* sin embargo, f puede ser creciente en x_0 y no tener derivada en x_0, como se ve en la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \leqslant 1 \\ 2 \text{ si } 1 < x \end{cases}$

cuya gráfica es la de la figura 2, que es creciente en $x_0 = 1$ y sin embargo no es derivable en x_0.

También una función puede ser derivable en x_0, creciente en x_0 y sin embargo su derivada *no* ser positiva.

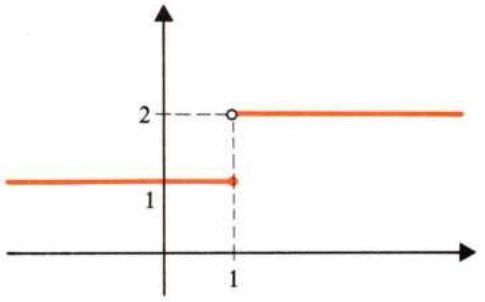
Ejemplo:

- Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$, cuya gráfica es la de la figura 3; f es creciente en $x_0 = 0$, ya que si

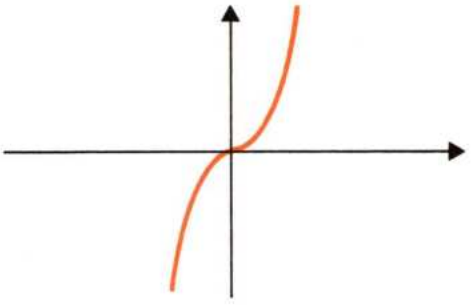
$$x < 0 \Longrightarrow x^3 = f(x) < 0 = f(0),$$

y si $0 < x$, entonces $f(0) \leqslant 0$ $f(x) = x^3$, sin embargo, $f'(x) = 3x^2$, y por tanto $f'(0) = 0$ no es positiva.

Una observación análoga es válida para el caso del decrecimiento en un punto.



(Fig. 2)



(Fig. 3)

29. Demuestra siguiendo el desarrollo del teorema **11.1.**, el teorema **11.2.**

30. ¿Es creciente en $x_0 = 2$ la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 2$? ¿Y en $x_0 = -1$?

31. Analiza la veracidad o falsedad del siguiente enunciado:

«La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es creciente en x_0, luego si existe su derivada en x_0, es positiva.»

32. ¿En qué puntos es creciente la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$?

33. Comprueba cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^5$ es siempre creciente
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = |x|$ no es creciente en $x_0 = 2$
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } & x \leqslant 0 \\ 1 \text{ si } & x > 0 \end{cases}$
es creciente en $x_0 = 0$.

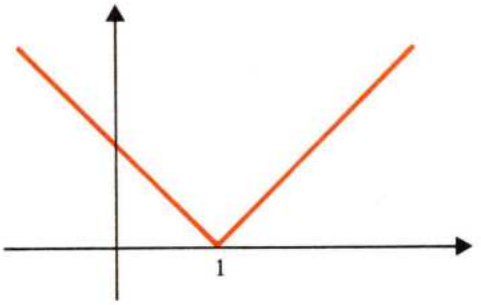
12 Cuadro resumen de derivadas

En el siguiente cuadro se resumen las derivadas estudiadas en este tema:

FUNCIONES	DERIVADAS
$f + g$	$(f + g)' = f' + g'$
$f + g + h$	$(f + g + h)' = f' + g' + h'$
$f - g$	$(f - g)' = f' - g'$
$c \cdot f,\ c \in \mathbb{R}$	$(cf)' = cf'$
$f \cdot g$	$(fg)' = f'g + fg'$
fgh	$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$
$\frac{1}{f}$	$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
$f(x) = c,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = a_0 + a_1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$	$f'(x) = a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}$
$y = f(x) = [v(x)]^n$	$y' = f'(x) = n[v(x)]^{n-1} \cdot v'(x)$
$y = f(x) = \frac{k}{x^n}$	$y' = f'(x) = -nkx^{-n-1}$
$y = f(x) = \sqrt{x + a}$	$y' = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + a}}$

Ejercicios y cuestiones

34. En la siguiente figura se ha representado la función $f(x) = y = |x - 1|$.



Calcula $f(2)$, $f(1)$ y $f(0)$. ¿Es continua la función f en el punto $x = 1$? ¿Es derivable la función f en el punto $x = 1$?

35. Sean las funciones $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x^4 + 3x,\ g(x) = x^3 - 1,\ h(x) = x^2 - 2x$$

Calcula:

a) $f'(x)$, $g'(x)$, $h'(x)$
b) $f'(1)$, $g'(1)$, $h'(1)$
c) $f'(0)$, $g'(0)$, $h'(0)$
d) $(f + g)'$
e) $(f + g + h)'$
f) $(f - g + h)'$
g) $(f + g + h)'(1)$
h) $(f \cdot g)'$
i) $(f \cdot g)'(1)$
j) $(f \cdot g \cdot h)'$
k) $(f \cdot g \cdot h)$

36. Calcula la función derivada de las siguientes funciones:

a) $y = 2$
b) $y = 2 + x$
c) $y = 2 + x + x^2 + x^3$
d) $y = 3x^5 - 7x^2 + 4x$
e) $y = (3x^2 - 5x)^2$
f) $y = (4x^3 - 5x)^3$
g) $y = (5x^6 - 7x^2 + 1)^4$
h) $y = x^2 + 2$
i) $y = \dfrac{7}{x^3}$
j) $y = \dfrac{2x + 1}{2x + 2}$
k) $y = \dfrac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 5x + 2}$

37. ¿Es creciente la función $f(x) = x^2 - 5x + 1$ en el punto $x = 1$?

38. ¿En qué intervalo es creciente la función $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} + 6x + 1$?

Tema 20 PRIMITIVAS DE UNA FUNCION

En este tema vamos a presentar una introducción, muy breve, a la teoría de la integración, que se desarrollará más extensamente en los próximos cursos. Nos limitaremos aquí a exponer el concepto de primitivas de una función.

Es costumbre llamar integral indefinida *al conjunto de las primitivas de una función; este nombre quedará justificado en el curso próximo.*

El proceso de calcular la integral indefinida o las primitivas de una función es, en cierto modo, inverso del de hallar la función derivada; pero así como dada una función derivable su función derivada era única, al hallar la integral indefinida de una función se obtiene una infinidad de funciones, aunque la estructura del conjunto de dichas funciones es muy sencilla.

En el desarrollo del tema vamos a limitarnos a establecer la definición de primitiva de una función y las principales propiedades del cálculo de primitivas.

1 Definición de primitiva de una función

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x^2$ y hagámonos la siguiente pregunta: ¿Existe una función F tal que f sea la función derivada de F? Si recordamos que la derivada de la función potencial x^n era nx^{n-1}, es inmediato ver que si tomamos $F(x) = x^3$ se tiene que $DF = f$; en este caso se dice que F es una primitiva de f.

Esto conduce a la siguiente definición:

Sea $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice *que la función* $F :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *es una primitiva de* f si

a) F es derivable

b) $DF = f$.

Ejemplos:

- Consideremos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 6x^5$. Entonces la función: $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x) = x^6$ es una primitiva de f.
- Sea $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Entonces la función $F :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \sqrt{x} + 6$ es una primitiva de f, puesto que recordando la tabla de derivación $DF(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = f(x)$.

Ejercicios:

1. ¿Es la función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = x^7$ una primitiva de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^8$?

2. Se considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + 4$. ¿Cuáles de las siguientes funciones son primitivas de f?

a) $F_1(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + 4x^2$

b) $F_2(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + 4x - 7$

c) $F_3(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + 8$

d) $F_4(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + 4x + 108$?

Observa que también $f(x) = \sqrt{x} - 8$ es una primitiva de f.

Ejemplos:

- ¿Es la función $F(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 6)^2$ una primitiva de

$$f(x) = (x^2 + 6)x = x^3 + 6x?$$

Tenemos que ver si $DF = f$; para ello tenemos en cuenta que

$$F(x) = \frac{1}{4}[v(x)]^2 \quad \text{donde} \quad v(x) = x^2 + 6$$

Entonces $F'(x) = \frac{1}{4} \cdot 2v(x)v'(x) = \frac{1}{4} \cdot 2(x^2 + 6) \cdot 2x = x^3 + 6x = f(x)$

Luego F es una primitiva de f.

- ¿Es $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 9x$ una primitiva de $f(x) = x + 8$?

Recordando las fórmulas de derivación de la tabla del tema anterior, se tiene:

$F'(x) = DF(x) = \frac{1}{2} 2x^{2-1} + 9 = x + 9 \neq f(x)$, luego F *no* es una primitiva de f.

3. Dada la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 6x^2 + 4x - 1$, halla una primitiva de f.

(Indicación: Trátese de hallar una primitiva polinómica $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$.)

4. ¿Es $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x^2 + 4$ una primitiva de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 8$?

5. Halla dos primitivas de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4 - 1$.

(Indicación: Usese el método del ejercicio 3.)

2 Estructura del conjunto de primitivas de una función

Considera las funciones $F_1, F_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas respectivamente por $F_1(x) = x^2 - 3x + 4$ y $F_2(x) = x^2 - 3x + 10$.

Se sabe que

$$DF_1(x) = F_1'(x) = 2x - 3 \quad \text{y} \quad DF_2(x) = F_2'(x) = 2x - 3$$

es decir, que F_1 y F_2 son dos primitivas distintas de $f(x) = 2x - 3$.

Se ve entonces que una función puede tener más de una primitiva.

El conjunto de todas las primitivas de una función f se llama la integral indefinida de f, y se escribe $\int f$ ó $\int f\,dx$.

En nuestro ejemplo anterior

$$x^2 - 3x + 10 \in \int (2x - 3)\,dx$$

y

$$x^2 - 3x + 4 \in \int (2x - 3)\,dx$$

De la definición de primitiva de f se sigue que:

$$F \in \int f\,dx \iff DF = f$$

6. De las siguientes relaciones, indica cuáles son ciertas y cuáles falsas:

$$2x + 4 \in \int (x^2 + 1)\,dx$$

$$x^2 + 3 \in \int (x + 5)\,dx$$

$$6x^4 + 1 \in \int 24x^3\,dx$$

$$x + 2 \in \int 1 \cdot dx$$

$$3x^2 + 5x \in \int (6x + 5)\,dx$$

Ejemplos:

- $(2x^3 - 5) \in \int 6x^2\,dx$, ya que $D(2x^3 - 5) = 6x^2$.
- $(3x + 4) \notin \int (x^3 + 1)\,dx$, pues $D(3x + 4) = 3 \neq x^3 + 1$.

¿Cómo es el conjunto de las primitivas de una función? Vamos a ver que, conocida una primitiva, todas las demás quedan determinadas de modo muy sencillo; para ello vamos a dar el siguiente teorema cuya demostración sobrepasa los límites de este curso.

Teorema:

Si una función f es derivable en el intervalo abierto $]a, b[$ y $\forall\, x \in]a, b[$ es $Df(x) = 0$, entonces f es una función constante.

De aquí se deduce el siguiente teorema:

Si F_1 y F_2 son dos primitivas de f en el mismo intervalo, entonces $F_1 - F_2 = C$, donde C es una constante.

En efecto, si F_1 y F_2 son primitivas de f, se tiene:

$$DF_1(x) = DF_2(x) = f(x)$$

luego

$$DF_1(x) - DF_2(x) = 0.$$

Como la derivada de una diferencia de funciones es igual a la diferencia de las funciones derivadas, resulta:

$$(DF_1 - DF_2)(x) = 0 \Longrightarrow D(F_1 - F_2)(x) = 0$$

y por el teorema, $F_1 - F_2$ es constante.

Es decir: *si F es una primitiva de f, entonces todas las demás se obtienen sumando a F una constante.*

$$\int \mathbf{f(x)\,dx} = \{\mathbf{F + C} \mid \mathbf{C} \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplos:

- $D(3x^2 + 6x) = 6x + 6$, luego $3x^2 + 6x$ es una primitiva de $6x + 6$, de aquí que:
$$\int (6x + 6)\,dx = 3x^2 + 6x + C$$
- Como $D\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$, se tiene que $\int -\frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{x} + C$
- Como $D(x^3 - 1) = 3x^2$, se tiene que $\int 3x^2\,dx = x^3 - 1 + C$, que también se puede escribir $\int 3x^2\,dx = x^3 + C'$, llamando C' a $-1 + C$.

7. Calcula la derivada de $F(x) = (6x^4 + 2)^3$ y di de cuál de las siguientes funciones es F primitiva:

a) $3(6x^4 + 2) + 15$

b) $72x^3(6x^4 + 2)^2 + 19$

c) $(6x^4 + 2)^4$

8. Sabiendo que la derivada de $F(x) = 3x^5 + C$ es $f(x) = 15x^4$, halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (1,8).

(Indicación: Determina C imponiendo la condición de que el punto (1,8) pertenece al grafo de $F(x)$.)

9. ¿Cuál es la integral indefinida de $f(x) = 3x^2$?

10. Calcula:

$$\int x^2\,dx \quad , \quad \int x^3\,dx \quad , \quad \int (x^2 + x^3)\,dx,$$

valiéndote de las tablas de derivación del tema anterior.

3 Propiedades del cálculo de primitivas

a) *Si F_1 y F_2 son primitivas de f_1 y f_2 respectivamente, entonces $F_1 + F_2$ es primitiva de $f_1 + f_2$.*

En efecto:

$D(F_1 + F_2) = (DF_1) + (DF_2) = f_1 + f_2$, luego $F_1 + F_2$ es una primitiva de $f_1 + f_2$.

Se puede entonces escribir:

$$\int (\mathbf{f_1 + f_2})\,\mathbf{dx} = \int \mathbf{f_1}\,\mathbf{dx} + \int \mathbf{f_2}\,\mathbf{dx}$$

Análogamente se verifica $\int (\mathbf{f_1 - f_2})\,\mathbf{dx} = \int \mathbf{f_1}\,\mathbf{dx} - \int \mathbf{f_2}\,\mathbf{dx}$.

Ejemplos:

- $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$ y $\int (3x + 4)\,dx = \frac{3x^2}{2} + 4x + C'$, luego
$$\int (x + 3x + 4)\,dx = \int (4x + 4)\,dx = \frac{x^2}{2} + C + \frac{3x^2}{2} + 4x + C' = 2x^2 + 4x + C'',$$
donde $C'' = C + C'$.

- $\int (x^2 - x + 1)\,dx = \int (x^2 - x)\,dx + \int 1 \cdot dx = \int x^2\,dx - \int x\,dx + \int 1 \cdot dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C.$

b) *Si F es una primitiva de f y $c \in \mathbb{R}$, entonces cF es una primitiva de cf.*

En efecto:

$$D(cF) = c(DF) = c \cdot f$$

Podemos escribir $\int (\mathbf{cf})\,\mathbf{dx} = \mathbf{c} \int \mathbf{f}\,\mathbf{dx}$

Ejemplos:

- $\int 3x^4\,dx = 3\int x^4\,dx = 3\,\frac{x^5}{5} + C = \frac{3}{5}\,x^5 + C'$

- $\int (x^2 + 2x)\,dx = \int x^2\,dx + \int 2x\,dx = \int x^2\,dx + 2\int x\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + C.$

11. Demuestra que si F_1 y F_2 son primitivas de f_1 y f_2 respectivamente, entonces $F_1 - F_2$ es primitiva de $f_1 - f_2$.

12. Demuestra que si F y G son dos funciones primitivas de f y g respectivamente, entonces $c_1F + c_2G$ es una primitiva de $c_1f + c_2g$, donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Deduce la fórmula:

$$\int (c_1 f + c_2 g)dx = c_1 \int f dx + c_2 \int g\,dx$$

4 Primitivas. Integrales inmediatas

Vamos a dar las primitivas de algunas funciones que por su sencillez se suelen llamar inmediatas, puesto que resultan directamente a partir de la tabla de derivación de las funciones elementales.

El cálculo de primitivas de otras funciones más complicadas se puede reducir en último término al de inmediatas por diversos métodos, que son objeto de estudio en cursos más avanzados.

Si $n \neq -1$, sabemos que

$$D\left(\frac{1}{n+1}\, x^{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\,(n+1)x^n = x^n$$

luego se tiene que $\dfrac{1}{n+1}\, x^{n+1}$ es una primitiva de x^n, de donde

$$\int \mathbf{x^n\, dx = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1} + C, \ si\ n \neq 1}$$

Ejemplos:

- Como $D\left(\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{n+1}\cdot(ax+b)^{n+1}\right) = (ax+b)^n$ se sigue que

$$\int (ax+b)^n\, dx = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot(ax+b)^{n+1} + C$$

- Como $D(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ se tiene:

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{x} + C$$

13. Calcula:

a) $\int 4x^3\, dx$, b) $\int 2x\, dx$.

14. Calcula:

a) $\int 6x^5\, dx$, b) $\int x^8\, dx$, c) $\int (x^3 - 2x + 5)dx$.

15. Calcula:

a) $\int (x^6 + 8)^2\, dx$, b) $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\, dx$

c) $\int x^7\, dx$, d) $\int (2x^3 + 2x)\, dx$.

16. Calcula: $\int (2x+1)^4\, dx$

a) desarrollando por el binomio de Newton,

b) directamente buscando una primitiva de la forma $(2x+1)^n$ para un cierto n.

Ejercicios y cuestiones

17. ¿Es la función $F(x) = \frac{6}{x}$ una primitiva de $f(x) = \frac{-6}{x^2}$?

18. De las siguientes funciones, indica cuáles son primitivas de $f(x) = 6x^3 + 8$

$$F_1(x) = \frac{3}{2}x^4 + 8x - 1 \quad ; \quad F_2(x) = \frac{3}{2}x^3 + 8x^2 - 1$$

$$F_3(x) = \frac{3}{2}x^4 + 8x + 16$$

19. ¿Cuál es la integral indefinida de la función nula $0(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$?

20. ¿Cuál es la integral indefinida de una función constante $f(x) = C$, $\forall x \in \mathbb{R}$?

21. Señala de las siguientes relaciones cuáles son falsas y cuáles verdaderas:

a) $(3x + 2) \in \int 3dx$
b) $3 \in \int (3x + 2)\,dx$
c) $(3x + 5) \in \int (3x + 2)\,dx$
d) $(3x - 8) \in \int 3dx$

22. Calcula:

a) $\int (x^6 + 2x^3 - 6x + 1)\,dx$
b) $\int (x^7 + 8)\,dx$
c) $\int (2x + 1)^6\,dx$
d) $\int (x^2 - 2x - 1)\,dx$

23. Calcula:

a) $\int (x^5 - 7x^4 + 2x + 3)\,dx$
b) $\int (ax + b)\,dx$
c) $\int (a_0 + a_1x + a_2x^2)\,dx$
d) $\int \frac{3}{x^2}\,dx$
e) $\int \frac{8}{x^3}\,dx$
f) $\int \frac{4}{x^5}\,dx$

24. Calcula:

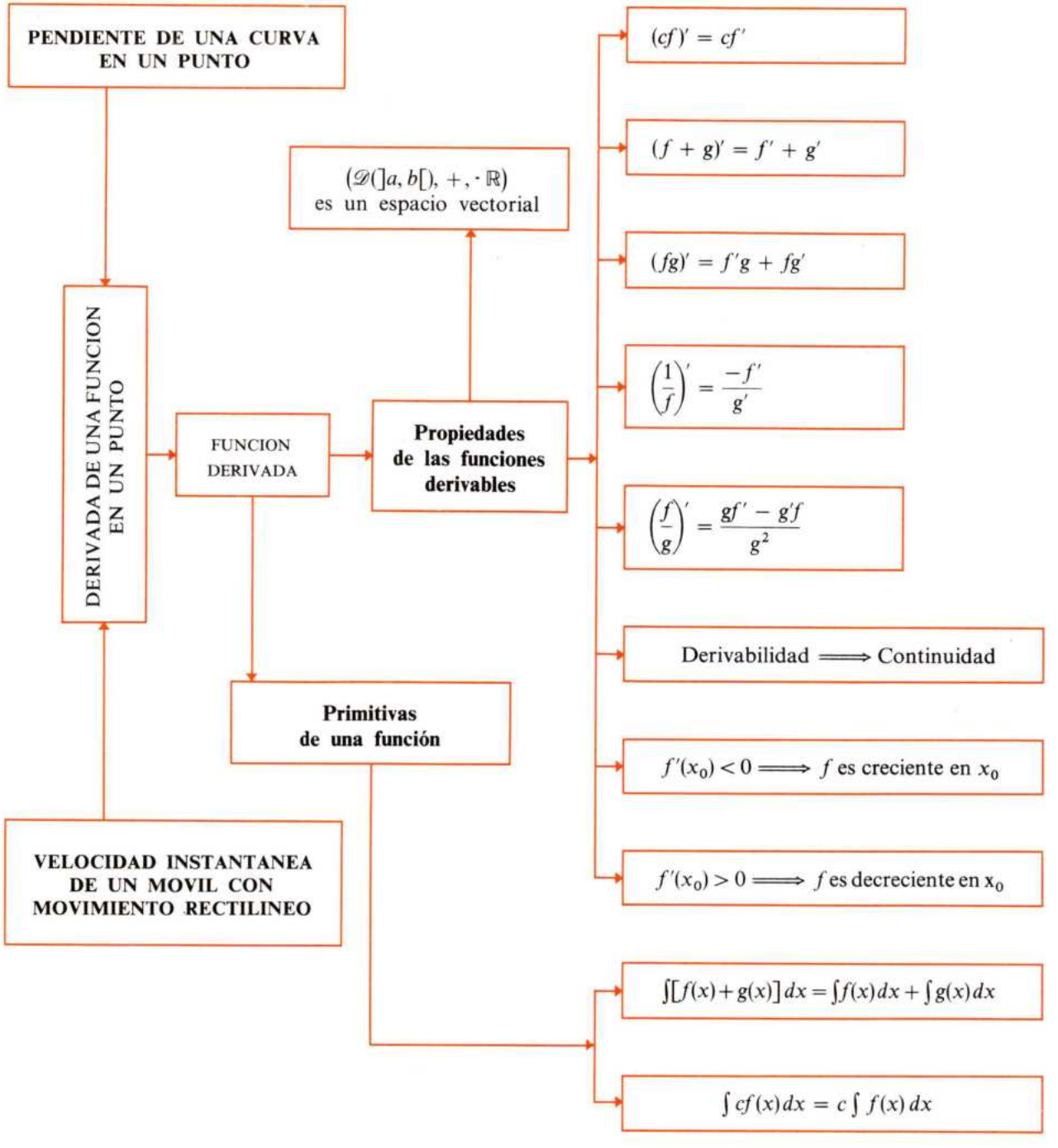
a) $\int (x + 1)^3\,dx$
b) $\int (x^2 + 1)^3\,dx$
c) $\int (x^3 + 1)^3\,dx$
d) $\int (x + 1)^4\,dx$
e) $\int (x^2 + 1)^4\,dx$

25. De las primitivas de $f(x) = 2x - 5$, ¿cuál es la que pasa por el punto $(0, 6)$?

26. De las primitivas de $f(x) = 2x - 1$, ¿cuál de ellas pasa por el punto $(1, 1,)$?

DIAGRAMA ESTRUCTURAL DE LA UNIDAD 6

DERIVADAS Y PRIMITIVAS



Complementos y ampliación

Como complemento y ampliación de lo estudiado en la Unidad 2, se inicia aquí el estudio de las traslaciones y las homotecias en el plano afín.

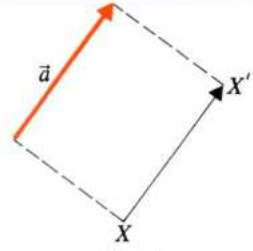
El tema 14, de continuidad, se amplía con el criterio de continuidad por sucesiones.

Finalmente se resuelven y se proponen varias ecuaciones exponenciales y logarítmicas, que completan el estudio de los logaritmos realizado en el tema 17.

1 Traslaciones en el plano afín

Unidad 2

1.1. Sea $\vec{a}$ un vector de $\mathbf{V}^2$; se llama *traslación de vector* $\vec{a}$ a la aplicación $t_{\vec{a}}$ de **P** en **P** en la que cada punto X del plano se transforma en un punto X' tal que el vector fijo $\overline{XX'} \in \vec{a}$ (Fig. 1)



(Fig. 1)

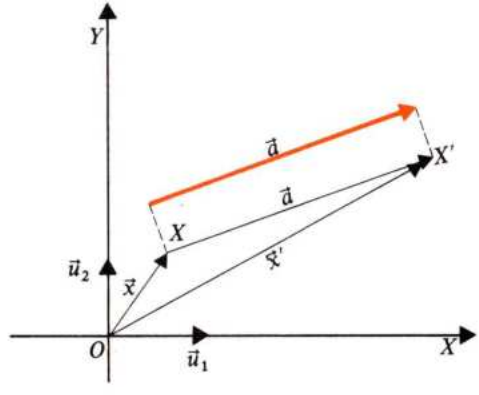
Es decir: $t_{\vec{a}}(X) = X' \Longleftrightarrow \overline{XX'} \in \vec{a} \Longleftrightarrow [\overline{XX'}] = \vec{a}$.

Se puede probar que una traslación $t_{\vec{a}}$ es una biyección de los puntos del plano **P** en sí mismo.

1.2. Si $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es una referencia afín y $\vec{x}$, $\vec{x}'$ los vectores de posición de los puntos X y X' respectivamente, la ecuación vectorial de la traslación es:

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a} \qquad [1] \qquad \text{(Fig. 2)}$$

Vamos a ver cuáles son las ecuaciones de la traslación en $\mathbb{R}^2$. Para ello debemos conocer las coordenadas de los puntos X, X' y las componentes del vector $\vec{a}$.



(Fig. 2)

Si las coordenadas del punto X son (x, y), las del punto $X'(x', y')$ y las componentes del vector $\vec{a}(a, b)$ teniendo en cuenta la ecuación [1], se tiene:

$$(x', y') = (x, y) + (a, b)$$

que es equivalente a:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \qquad [2]$$

Las ecuaciones [2] se llaman *ecuaciones analíticas de la traslación.*

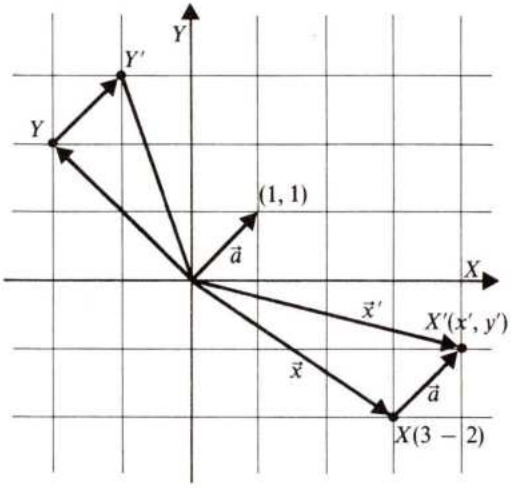
1.3. La figura 3 muestra que la traslación $t_{\vec{a}}$ de vector $\vec{a}(1, 1)$ aplicada al punto $X(3, -2)$ da como imagen el punto $X'(x', y')$.

Las coordenadas de X' se obtienen aplicando las ecuaciones [2]

$$\begin{cases} x' = 3 + 1 = 4 \\ y' = -2 + 1 = -1 \end{cases}$$

$$(x', y') = (4, -1)$$

En la misma figura 3 las coordenadas del punto Y son $(-2, 2)$; el punto Y', trasladado de Y, tiene por coordenadas $(-1, 3)$.



(Fig. 3)

1.4. Sean $t_{\vec{a}}$ y $t_{\vec{b}}$ dos traslaciones del plano afín. Se llama producto de las traslaciones $t_{\vec{a}}$ y $t_{\vec{b}}$ a la aplicación $t_{\vec{b}} \circ t_{\vec{a}}$ composición de las aplicaciones $t_{\vec{b}}$ y $t_{\vec{a}}$.

Aplicando el producto a un punto X del plano afín, resulta:

$$(t_{\vec{b}} \circ t_{\vec{a}})(X) = t_{\vec{b}}(t_{\vec{a}}(X)) = t_{\vec{b}}(X') = X''$$

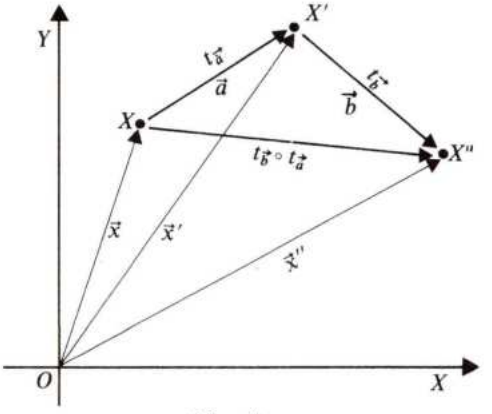
Considerando los vectores de posición $\vec{x}$, $\vec{x}'$ y $\vec{x}''$ de los puntos X, X' y X'' respectivamente, obtenemos:

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a} \quad \text{y} \quad \vec{x}'' = \vec{x}' + \vec{b}$$

luego

$$\vec{x}'' = (\vec{x} + \vec{a}) + \vec{b} = \vec{x} + (\vec{a} + \vec{b})$$

Por tanto, la traslación $t_{\vec{b}} \circ t_{\vec{a}} = t_{\vec{a}+\vec{b}}$; es decir, el producto $t_{\vec{b}} \circ t_{\vec{a}}$ de la traslación $t_{\vec{a}}$ por la traslación $t_{\vec{b}}$ es otra traslación definida por el vector $\vec{a} + \vec{b}$. (Fig. 4.)



(Fig. 4)

Se puede probar que el conjunto de todas las traslaciones del plano con la operación producto de traslaciones es un grupo.

Esto es consecuencia de ser el par $(\mathbf{V}^2, +)$ un grupo.

1.5. Sea $t_{\vec{a}}$ la traslación definida por el vector $\vec{a} = (2, 1)$; se pide:

a) los puntos trasladados: A', B' de $A(1, 7)$ y $B(1, 2)$, respectivamente,

b) comprobar que si A' y B' son los traslados de A y B respectivamente, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A'B'}$ tienen las mismas componentes.

1.6. Si las traslaciones $t_{\vec{a}}$ y $t_{\vec{b}}$ están determinadas por $\vec{a} = (2, 1)$ y $\vec{b} = (0, 1)$, calcula:

a) $t_{\vec{b}} \circ t_{\vec{a}}$; b) $t_{\vec{a}} \circ t_{\vec{b}}$; c) si $X(1, 3)$, ¿cuál es $t_{\vec{b}} \circ t_{\vec{a}}(X)$? ¿Y $t_{\vec{a}} \circ t_{\vec{b}}(X)$?

1.7. Demuestra que el conjunto de traslaciones del plano con la operación producto forma grupo.

1.8. Sea $t_{\vec{a}}$ la traslación definida por el vector $\vec{a} = (2, 1)$; se pide:

a) el punto trasladado de $A(1, 0)$ por $t_{-\vec{a}}$,

b) el punto trasladado de A por $t_{\vec{a}} \circ t_{-\vec{a}}$.

2 Homotecias en el plano afín

2.1. Dados un punto A del plano afín y un número real $k \neq 0$, la aplicación de $\mathbf{P}$ en sí mismo que asocia a todo punto X de $\mathbf{P}$ el punto X' tal que $\overrightarrow{AX'} = k\overrightarrow{AX}$ [1] se llama *homotecia de centro A y razón k* (Fig. 5)

(Fig. 5)

Esta homotecia se designa por $H(A, k)$.

Es inmediato ver que H es una biyección en el conjunto de los puntos del plano.

Siendo $k \neq 0$, la relación [1] se puede escribir así: $\frac{1}{k}\overrightarrow{AX'} = \overrightarrow{AX}$

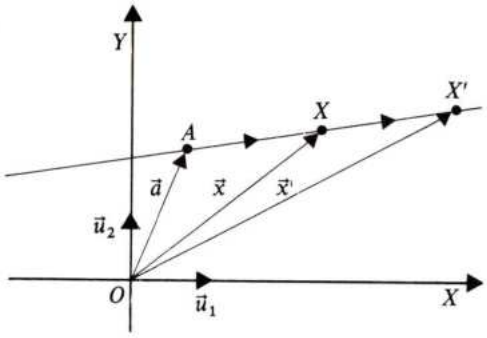
La homotecia $H\left(A, \frac{1}{k}\right)$ es la homotecia recíproca de $H(A, k)$.

Los puntos X y X' se dice que son homotéticos.

2.2. Si $\mathcal{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es una referencia del plano afín y $\vec{a}$, $\vec{x}$, $\vec{x}'$ los vectores de posición de los puntos A, X, X' respectivamente, la ecuación vectorial de la homotecia se obtiene a partir de la relación [1] del apartado **2.1.**

$$\vec{x}' - \vec{a} = k(\vec{x} - \vec{a})$$

de donde $\vec{x}' = \vec{a} + k(\vec{x} - \vec{a})$ [2] (Fig. 6)



(Fig. 6)

Si las coordenadas de los puntos A, X, X' son $A(a, b)$, $X(x, y)$, $X'(x', y')$ respectivamente, sustituyendo en la ecuación [2] cada vector por sus componentes se tiene:

$$(x', y') = (a, b) + k((x, y) - (a, b))$$

$$\text{de donde } \begin{cases} x' = a + k(x - a) \\ y' = b + k(y - b) \end{cases} \quad [3]$$

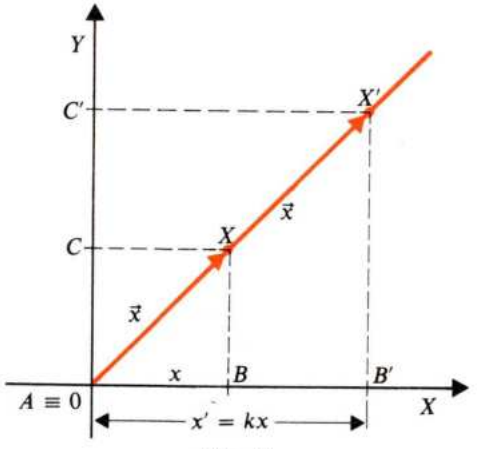
Estas ecuaciones se llaman *ecuaciones analíticas de la homotecia.*

2.3. Si el centro de homotecia es el origen de coordenadas, las ecuaciones [2] y [3] se transforman respectivamente en las ecuaciones [4] y [5] siguientes:

$$\vec{x}' = k\vec{x} \quad [4]$$

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \quad [5]$$

La figura 7 es una interpretación gráfica de las ecuaciones [4] y [5]. Los triángulos OXB y $OX'B'$ son homotéticos; la razón de homotecia es k.



(Fig. 7)

2.4. Las coordenadas de un punto X son $(4, 8)$. ¿Cuáles son las coordenadas del punto homotético de X en la homotecia $H\left(0, \frac{1}{2}\right)$?

Aplicando las ecuaciones [5], se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}\, x = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \\ y' &= \frac{1}{2}\, y = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 \end{aligned}\right\} \text{ luego } X'(2, 4)$$

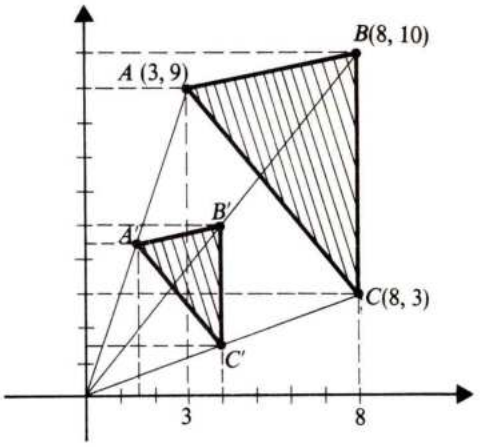
2.5. Las coordenadas de los vértices de un triángulo ABC (Fig. 8) son $A(3, 9)$, $B(8, 10)$ y $C(8, 3)$.

Aplicando la homotecia $H\left(0, \frac{1}{2}\right)$ se obtiene:

$H(A) = A'\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$; $H(B) = B'(4, 5)$;

$H(C) = C'\left(4, \frac{3}{2}\right)$

El triángulo $A'B'C'$ es homotético del triángulo ABC, y la razón de homotecia es $\frac{1}{2}$.



(Fig. 8)

2.6. Se considera el triángulo ABC de la figura 8 anterior. Halla el triángulo homotético en la homotecia $H\left(0, \frac{2}{3}\right)$.

1 Límite de sucesiones

Unidad 3

a) Si $a > 1$, $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$. El número $a > 1$ se puede poner así: $a = 1 + \alpha$.

Aplicando el binomio de Newton, resulta:

$$a^n = (1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + \binom{n}{2}\alpha^2 + \binom{n}{3}\alpha^3 + \cdots + \alpha^n < 1 + n\alpha$$

Dado un número $k > 0$ arbitrario, $1 + n\alpha > k$, siempre que $n > \frac{k-1}{\alpha}$; luego (a^n) no está acotada.

La sucesión (a^n) es una sucesión creciente, ya que

$$(1 + \alpha) < (1 + \alpha)^2 < (1 + \alpha)^3 < (1 + \alpha)^4 < \cdots < (1 + \alpha)^n < \cdots$$

b) Si $a = 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} a^n = 1$, ya que $a^n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$

c) Si $0 < a < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$, es decir, la sucesión (a^n) es una sucesión nula.

En efecto si $0 < a < 1$, será $a = \frac{1}{c}$ donde $c > 1$.

De $a^n = \left(\frac{1}{c}\right)^n = \frac{1}{c^n} = \frac{1}{(1 + \alpha)^n} < \frac{1}{1 + n\alpha} < \frac{1}{n\alpha}$ y $\lim_{n\to\infty} a^n \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\alpha}$

se sigue que $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$, ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\alpha} = \frac{1}{\alpha} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\alpha} \cdot 0 = 0$

2 Suma de los términos de una progresión geométrica

2.1. La suma S de los infinitos términos de una progresión geométrica

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \ldots) \quad \text{es:}$$

a) $S = +\infty$ si $r > 1$; b) $S = \dfrac{a_1}{1 - r}$ si $0 < r < 1$

c) $S = +\infty$ si $r = 1$ y $a_1 > 0$; d) $S = -\infty$ si $r = 1$ y $a_1 < 0$.

En efecto: la fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica es: $S_n = \dfrac{a_1 r^n - a_1}{r - 1}$

Se define la suma S de los infinitos términos como $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$; es decir: $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$

a) Si es $r > 1$, entonces $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_1 r^n - a_1}{r - 1} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{a_1 r^n}{r - 1} - \dfrac{a_1}{r - 1} \right)$

Como $\lim\limits_{n \to \infty} r^n = +\infty$, se tiene $S = +\infty$.

b) Si es $0 < r < 1$, entonces $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{a_1}{1 - r} - \dfrac{a_1}{1 - r} r^n \right)$

y siendo $\lim\limits_{n \to \infty} r^n = 0$, se tiene que: $S = \dfrac{a_1}{1 - r}$

c) Si $r = 1$, la sucesión $S_n = (s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n \ldots)$ cuyos términos son:

$s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_1 = 2a_1$, $s_3 = 2a_1 + a_1 = 3a_1$, $\ldots$, $s_n = na_1$

tiene por límite ∞, es decir: $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \infty$. De modo análogo se prueba d).

Si $r = -1$, la progresión es: a_1, $-a_1$, a_1, $-a_1$, $\ldots$, y la sucesión S_n que resulta: $(a_1, 0, a_1, 0, a_1, 0, \ldots)$ no tienen límite.

2.2. Se da un cuadrado de lado a. Unimos los puntos medios de los lados de modo que se obtenga un nuevo cuadrado, y se repite el proceso en este cuadrado. Repetimos el proceso indefinidamente en una sucesión de cuadrados.

Se pide:

a) la sucesión de los lados de los sucesivos cuadrados,

b) la sucesión de los perímetros de los sucesivos cuadrados,

c) la sucesión de las áreas de los sucesivos cuadrados,

d) la suma de las áreas de todos los cuadrados.

1 Criterios de continuidad

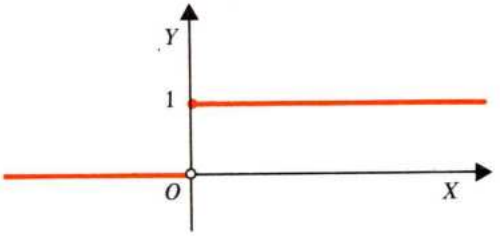
Unidad 4

1.1. Para comprobar que una función es continua es conveniente en algunos casos, utilizar el siguiente teorema, que sólo enunciamos, pues su demostración se sale de los propósitos del curso.

Una función f es continua en $x = a \in Dom(f)$ si y sólo si para *toda* sucesión (x_n) *cuyos elementos* $x_n \in Dom(f)$ *y tal que* $\lim_{n\to\infty}(x_n) = a$ *se verifica:* $\lim_{n\to\infty}(f(x_n)) = f(a)$.

Observa que *no* basta que para una cierta sucesión (x_n) tal que $\lim_{n\to\infty}(x_n) = a$ sea $\lim_{n\to\infty}(f(x_n)) = f(a)$, sino que esto debe verificarse para *toda* sucesión (x_n) tal que $\lim_{n\to\infty}(x_n) = a$. Los siguientes ejemplos ilustran el teorema.

1.2. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$ cuya gráfica es la de la figura.



Evidentemente, f no es continua en $x = 0$, pues

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

de donde no existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ y f no es continua en $x = 0$.

Consideremos ahora la sucesión. $\left(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \cdots -\frac{1}{n}\right)$ cuyo límite es 0; la sucesión de las imágenes es $(0, 0, 0, \ldots, 0\ldots)$ cuyo límite es 0. ¿Quiere esto significar una contradicción con el teorema? No, porque el teorema dice que para ser f continua en $x = 0$ es necesario que para toda sucesión con $\lim_{n\to\infty}(x_n) = 0$, se verifique que $\lim_{n\to\infty}(f(x_n)) = 0$. Si tomamos otra sucesión, $(x_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}\cdots\right)$, entonces $\lim_{n\to\infty}(x_n) = 0$ y, sin embargo, $\lim_{n\to\infty}(f(x_n)) = \lim_{n\to\infty}(1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots) = 1$; luego f no es continua, como ya vimos.

1.3. Se considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 1 \\ 3x^2 & \text{si } x \leqslant 1 \end{cases}$

Consideremos la sucesión $\left(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots\right)$. ¿Es f continua en $x = 1$?

La sucesión $(x_n) = \left(\frac{n+1}{n}\right)$ es tal que $\lim_{n\to\infty}(x_n) = 1$; la sucesión de las imágenes es $(0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ cuyo límite es 0, entonces $f(1) = 3 \neq 0$ y, por el teorema, f *no* es continua en $x = 1$.

1.4. Considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

Estudia el comportamiento de la sucesión $\left(\dfrac{2n}{n+1}\right)$ y el de las imágenes y deduce que f *no* es continua en $x = 2$.

1 Límites de la forma indeterminada 1^∞

Unidad 5

1.1. Consideremos en primer lugar $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{k}{x}}$

Este tipo de límites se reduce al número e poniendo $x = \dfrac{1}{h}$; entonces cuando $x \longrightarrow 0$, $h \longrightarrow \infty$ y se tiene:

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{k}{x}} = \lim_{h \to \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^{kh} = \left[\lim_{h \to \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^{h}\right]^k = e^k$$

1.2. El siguiente límite, que también es de la forma indeterminada 1^∞, se reduce fácilmente al número e.

$$\lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{x}{2x + 1}\right)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{2x + 1}{x}}\right)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x}}\right)^{\frac{2}{x}}$$

Haciendo $2 + \dfrac{1}{x} = h$, resulta que cuando $x \longrightarrow 0$, $h \longrightarrow \infty$; entonces

$$\lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x}}\right)^{\frac{2}{x}} = \lim_{h \to \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^{2h-4} = \left[\lim_{h \to \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^{h}\right]^2 \cdot \lim_{h \to \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^{-4} =$$

$$= e^2 \cdot 1 = e^2$$

1.3. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x + 4}{x - 4}\right)^x$;

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{3x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{3x+1}{x}}$;

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 + 5}{x^2 - 5}\right)^{x^2}$

2 Ecuaciones exponenciales

2.1. Se llaman ecuaciones exponenciales a las que tienen la incógnita como exponente. Nos vamos a ocupar de aquellas que se pueden reducir a la forma $a^x = b$, donde $a, b > 0$ y $a \neq 1$.

Vamos a resolver la siguiente ecuación exponencial: $3^x + 3^{1-x} = 4$.

Como $3^{1-x} = \dfrac{3^1}{3^x}$, se tiene: $3^x + 3^{1-x} = 4 \Longrightarrow 3^x + \dfrac{3}{3^x} = 4$

Si quitamos denominadores multiplicando por 3^x, queda:

$$(3^x)^2 + 3 = 4 \cdot 3^x; \qquad (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$$

Llamaremos z a 3^x, $3^x = z$, con lo cual la ecuación se convierte en $z^2 - 4z + 3 = 0$, que es una ecuación de 2.º grado en z.

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

$z = 3 \Longrightarrow 3^x = 3$, de donde $x = 1$

$z = 1 \Longrightarrow 3^x = 1$, de donde $x = 0$

2.2. Para resolver la ecuación exponencial $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^x = 2.047$ tendremos en cuenta que 1, 2, 4, 8, 16... son los términos de una progresión geométrica de razón 2; luego $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^x$ es la suma de los términos de una progresión geométrica de razón 2 con $a_1 = 1$ y $a_n = 2^x$

$$S = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{2^x \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^{x+1} - 1$$

La ecuación que nos queda es: $2^{x+1} - 1 = 2.047$; $2^{x+1} = 2.048$.

Tomando logaritmos decimales $(x + 1)\log 2 = \log 2.048$; $x + 1 = \dfrac{\log 2.048}{\log 2}$

pero $2.048 = 2^{11}$; $\log 2.048 = \log 2^{11} = 11 \log 2$.

Luego $x + 1 = \dfrac{11 \log 2}{\log 2} = 11 \Longrightarrow x = 10$.

2.3. Resuelve las ecuaciones exponenciales siguientes:

a) $5^{2x-1} = \sqrt[3]{25^{x^2 - \frac{1}{4}}}$;

b) $4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0$

c) $3^{2(x+1)} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0$;

d) $2^{x+3} + 2^{2x+2} = 320$

e) $10^{3-x} = 1$;

f) $2^{2x} + 2^{2x-1} + 2^{2(x-1)} + 2^{2x-3} + 2^{2(x-2)} = 1.984$

2.4. Resuelve el sistema de ecuaciones exponenciales $\begin{cases} 3 \cdot 5^x + 2 \cdot 6^{y+1} = 807 \\ 15 \cdot 5^{x-1} - 6^y = 339 \end{cases}$ [1]

Indicación: Haz la siguiente sustitución en el sistema [1] $\begin{cases} 5^x = a \\ 6^y = b \end{cases}$

3 Ecuaciones logarítmicas

3.1. Las ecuaciones con logaritmos se llaman ecuaciones logarítmicas. Como la función logarítmica es inyectiva, se tiene que $\log x = \log y \Longrightarrow x = y$.

Esta propiedad se aplica para resolver algunas ecuaciones; ejemplo:

Sea la ecuación $\log x = \log 40 - \log 10$, donde $x > 0$. Aplicando las propiedades de los logaritmos, se tiene:

$$\log x = \log \frac{40}{10} = \log 4; \quad \log x = \log 4 \Longrightarrow x = 4$$

3.2. Consideremos ahora la ecuación: $\dfrac{\log 2 + \log(11 - x^2)}{\log(5 - x)} = 2$, que se puede escribir: $\dfrac{\log 2 + \log(11 - x^2)}{\log(5 - x)} = 2 \Longrightarrow \log 2 + \log(11 - x^2) = 2\log(5 - x)$;

y aplicando las reglas dadas para operar con logaritmos

$\log 2 + \log(11 - x^2) = 2\log(5 - x) \Longrightarrow \log 2(11 - x^2) = \log(5 - x)^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 2(11 - x^2) = (5 - x)^2$. Las soluciones de esta ecuación son:

$$x = 3; \qquad x = \frac{1}{3}$$

3.3. Veamos ahora la resolución de un sistema de ecuaciones logarítmicas.

Sea el sistema $\begin{cases} 2\log x - 3\log y = 7 \Longrightarrow \log x^2 - \log y^3 = 7 \Longrightarrow \log \dfrac{x^2}{y^3} = 7 \\ \log x + \log y = 1 \Longrightarrow \log x \cdot y = 1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \log \dfrac{x^2}{y^3} = 7 \Longrightarrow \dfrac{x^2}{y^3} = 10^7 \\ \log x \cdot y = 1 \Longrightarrow x \cdot y = 10 \end{array}\right\}$$ Resolviendo este sistema, se obtiene:

$$y = \frac{1}{10}; \qquad x = \frac{10}{\dfrac{1}{10}} = 100$$

3.4. Resuelve las siguientes ecuaciones y sistemas:

a) $\log(2^{2-x})^{2+x} + \log 1.250 = 4$

b) $\log \sqrt{3x+1} - \log \sqrt{2x-3} = 1 - \log 5$

c) $\log(7x - 9)^2 + \log(3x - 4)^2 = 2$

d) $3\log x - \log 32 = \log \dfrac{x}{2}$

e) $\begin{cases} x + y = 70 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - y = 8 \\ \log_2 x = 7 - \log_2 y \end{cases}$

g) $\begin{cases} \log x = \log 5y + \log 14 - \log 7 \\ x^2 = 20y^2 + 15x + 20 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \log x - \log 5 = 3\log 5 \\ \log x^3 - \log y^2 = \log 2^4 \end{cases}$

TABLAS

LOGARITMOS											DIFERENCIAS								
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

En la realización del libro SANTILLANA
de **"Matemática"** para el primer curso de Bachillerato
ha intervenido el siguiente equipo:

Máximo Anzola.
(Lic. en Matemática. Prof. agregado del Instituto Nacional de Bachillerato "Simancas", Madrid.)

José Caruncho.
(Doctor en Matemática. Prof. de la Universidad Autónoma de Madrid.)

María Gutiérrez.
(Lic. en Matemática.)

Dirección científica:

José Antonio Fernández Viña.
(Catedrático de Matemática General de la Universidad Autónoma de Madrid.)

Dirección editorial:

José Gil Martos.
(Prof. de Matemática.)

© 1976 by SANTILLANA, S. A. de Ediciones
Elfo, 32 - Madrid-27.
PRINTED IN SPAIN
Impreso en España en los
Talleres Gráficos Mateu Cromo, S. A.
Carretera de Pinto a Fuenlabrada, s/n. Pinto (Madrid)
ISBN: 84-294-1368-5
Depósito Legal: M. 10.350-1977

Texto aprobado por el Ministerio de Educación y Ciencia en O. M. de 4 de mayo de 1976.

textos santillana para el Bachillerato

1

- Ciencias Naturales
- Dibujo
- Francés
- Historia de las Civilizaciones
- Inglés
- Lengua Española y Literatura
- Matemática

2

- Física y Química
- Francés
- Geografía
- Inglés
- Latín
- Lengua Española y Literatura
- Matemática

3

- Filosofía
- Francés
- Geografía e Historia
- Inglés
- Matemática

- Ciencias Naturales
- Física y Química
- Griego
- Latín
- Lengua Española y Literatura